Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DS1- 3H00

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\sqrt{1+2x} - (1+3x)^{\frac{1}{3}}}{x^2}.$$

1. **(a)** On sait que :

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + \underset{u\to 0}{o}(u^3)$$

et $\lim\limits_{x\to 0} 2x = 0$. Donc, par composition :

$$\sqrt{1+2x} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

De même, on sait que :

$$(1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{9}u^2 + \frac{5}{81}u^3 + \underset{u\to 0}{o}(u^3)$$

et $\lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$. Donc, par composition :

$$(1+3x)^{\frac{1}{3}} = 1 + x - x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

On obtient alors pour tout $x > 0$:

$$\sqrt{1+2x} - (1+3x)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

(b) Ainsi on a, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{6}x^3 \underset{x\to 0}{o}(x^3)}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{7}{6}x + \underset{x\to 0}{o}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}.$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \frac{1}{2}$.

2. Soit $x > 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{7}{6}x + \underset{x\to 0}{o}(x) - \frac{1}{2}}{x} = -\frac{7}{6} + \underset{x\to 0}{o}(1) \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{7}{6}.$$

Donc (le prolongement de) f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{7}{6}$.

Exercice 2

On note Ω l'univers.

1. On a : $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
   - L'événement $[X_2 = 1]$ correspond au tirage de la boule 1 lors du premier tirage : $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{2}$.
   - L'événement $[X_2 = 2]$ correspond au tirage de la boule 2 lors du premier tirage ; la boule 1 étant alors sûre de sortir au deuxième : $\mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{2}$.

   On en déduit alors :
   $$\mathbb{E}(X_2) = \frac{3}{2} \quad ; \quad \mathbb{E}(X_2^2) = \frac{5}{2} \quad ; \quad \mathbb{V}(X_2) = E(X_2^2) - \mathbb{E}(X_2)^2 = \frac{1}{4}.$$
2. On a : $X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.
   - L'événement $[X_2 = 1]$ correspond au tirage de la boule 1 lors du premier tirage : $\mathbb{P}(X_3 = 1) = \frac{1}{3}$.
   - L'événement $[X_3 = 2]$ se réalise dans deux situations : soit on tire la boule deux (1 chance sur 3) puis la boule 1 (seule restante) ; soit on tire la boule trois (1 chance sur 3) puis la boule 1 (une chance sur deux). La formule des probabilités totales permet de justifier ce raisonnement :
   $$\begin{aligned}
   &\mathbb{P}(X_3 = 2) \\
   &= \mathbb{P}_{N_1=2}(X_3 = 2)\mathbb{P}(N_1 = 2) + \mathbb{P}_{N_1=3}(X_3 = 2)\mathbb{P}(N_1 = 3) + \mathbb{P}_{N_1=1}(X_3 = 2)\mathbb{P}(N_1 = 1) \\
   &= \mathbb{P}(N_2 = 1 \mid N_1 = 2)\mathbb{P}(N_1 = 2) + \mathbb{P}(N_2 = 1 \mid N_1 = 3) + 0 \\
   &= 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\
   &= \frac{1}{2}.
   \end{aligned}$$
   - L'événement $[X_3 = 3]$ se réalise seulement lorsque l'on tire, dans cet ordre, les boules 3,2 et 1. D'où par la formule des probabilités composées :
   $$\mathbb{P}(X_3 = 3) = \mathbb{P}(N_1 = 3)\mathbb{P}_{[N_1=3]}(N_2 = 2)\mathbb{P}_{[N_1=3]\cap[N_2=2]}(N_3 = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}.$$

   On en déduit alors :
   $$\mathbb{E}(X_3) = \frac{5}{6}.$$
3. La variable aléatoire X_n prend ses valeurs dans $[\![1, n]\!]$.
4. L'événement $[X_n = 1]$ consiste à tirer la boule 1 au premier tirage. L'urne contient alors n boules :
   $$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}.$$
   L'événement $[X_n = n]$ consiste à tirer successivement dans cet ordre les boules n, $n-1$,..., 1. Par la formule des probabilités composées :
   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}(X_n = n) &= \mathbb{P}(N_1 = n)\mathbb{P}_{[N_1=n]}(N_2 = n-1)\ldots\mathbb{P}_{[N_1]\cap\ldots[N_{n-1}]}(N_n = 1) \\
   &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{n-1} \times \cdots \times \frac{1}{1} \\
   &= \frac{1}{n!}.
   \end{aligned}$$

5. Soit $k \geq 2$. La famille $([N_1 = j])_{j \in [\![1,n]\!]}$ donc, d'après la formule des probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{[N_1=j]}(X_n = k) P(N_1 = j) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{[N_1=j]}(X_n = k) \quad \text{car } \mathbb{P}(N_1 = j) = \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n} \mathbb{P}_{[N_1=j]}(X_n = k)
\end{aligned}$$

car si $N_1 = 1$ alors $X_n = 1$ donc $\mathbb{P}_{[N_1=1]}(X_n = k) = 0$.
Soit $j \in [\![2, n]\!]$. Sachant que l'événement $[N_1 = j]$ est réalisé, l'urne contient donc $j-1$ boules numérotés de 1 à $j-1$ donc la probabilité $\mathbb{P}_{[N_1=j]}(X_n = k)$ est égale à la probabilité de vider cette urne en $k-1$ étapes (on a déjà fait un premier tirage). D'où :

$$\mathbb{P}_{[N_1=j]}(X_n = k) = \mathbb{P}(X_{j-1} = k-1).$$

Finalement, on obtient bien :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n} \mathbb{P}_{[N_1=j]}(X_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{j=2}^{n} \mathbb{P}(X_{j-1} = k-1).$$

6. En appliquant successivement la relation de la question précédente on trouve :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) + \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X_{n+1} = k) \\
&= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k}{n+1} \sum_{j=2}^{n+1} \mathbb{P}(X_{j-1} = k-1) \\
&= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k}{n+1} \left(\mathbb{P}(X_n = k-1) + \sum_{j=2}^{n} \mathbb{P}(X_{j-1} = k-1) \right) \\
&= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k}{n+1} \left(\mathbb{P}(X_n = k-1) + n\mathbb{P}(X_n = k) \right) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=2}^{n+1} k\mathbb{P}(X_n = k-1) + \frac{n}{n+1} \sum_{k=2}^{n} k\mathbb{P}(X_n = k) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} (k+1)\mathbb{P}(X_n = k) + \frac{n}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X_n = k) - \frac{1}{n} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} + \mathbb{E}(X_n).
\end{aligned}$$

7. Soit $n \geq 2$. Par télescopage :

$$\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_1) = \sum_{k=1}^{n-1} (\mathbb{E}(X_{k+1}) - \mathbb{E}(X_k)) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

D'où, compte tenu que $\mathbb{E}(X_1) = 1$:

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

8. (a) Soit $k \geq 2$. La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :

$$\forall t \in [k, k+1] \quad \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

En intégrant cette inégalité en k et $k+1$ on obtient, par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant) :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k}.$$

De même :

$$\forall t \in [k-1, k] \quad \frac{1}{t} \geq \frac{1}{k}.$$

En intégrant cette inégalité en $k-1$ et k on obtient, par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant) :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt \geq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k}.$$

Finalement, pour tout $k \geq 2$, on a bien :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt.$$

(b) Soit $n \geq 2$. En sommant les inégalités ci-dessus pour k allant de 2 à n on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt$$

et la relation de Chasles donne alors :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^{n} \frac{1}{t} dt.$$

On en déduit finalement, après calcul des intégrales :

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n).$$

En particulier, on en déduit, pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{\ln(n+1) - \ln(2) + 1}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \frac{\ln(n) + 1}{\ln(n)}.$$

Or, il n'est pas très dur de vérifier que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln(2) + 1}{\ln(n)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n) + 1}{\ln(n)} = 1$$

si bien que d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1.$$

Cela montre que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

(c) D'après les questions précédentes : $\mathbb{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Problème

Partie 1–Le modèle logistique discret

On suppose qu'il existe un réel strictement positif M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq M.$$

Dans toute cette partie, on suppose $0 < u_0 < M$ et on pose, pour tout entier naturel n :

$$v_n = \frac{u_n}{M}.$$

On suppose qu'il existe un réel a tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = a v_n(1 - v_n).$$

Le cas $0 < a \leq 1$.

Dans cette partie, on prend $0 < a \leq 1$.
On considère les fonctions f_a et g_a définies sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_a(x) = ax(1-x) \quad \text{et} \quad g_a(x) = f_a(x) - x.$$

1. **(a)** La fonction f_a est polynomiale donc dérivable sur $[0, 1]$ et on a :

$$\forall x \in [0,1], \quad f_a'(x) = a(1-x) - ax = a(1-2x).$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$f_a'(x) \geq 0 \iff \frac{1}{2} \geq x \quad \text{avec égalité ssi } x = \frac{1}{2}.$$

On en déduit :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
Signe de $f_a'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f_a	0	$\nearrow$	$\frac{a}{4}$	$\searrow$	0

(b) La fonction g_a est polynomiale donc dérivable sur $[0,1]$ et on a :

$$\forall x \in [0,1], \quad g_a'(x) = a(1-x) - ax - 1 = a - 1 - 2ax.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$g_a'(x) < 0 \Longleftrightarrow \frac{a-1}{2a} < x.$$

Or comme $a \in]0,1]$, on a : $\dfrac{a-1}{2a} \leq 0$ si bien que g_a' est strictement négative sur $[0,1]$:

x	0	1
Variation de g_a	0 $\searrow$	

Comme g_a est strictement décroissante sur $[0,1]$ et que $g_a(0) = 0$ alors g_a est négative sur $[0,1]$.

2. **(a)** Le tableau de variations de f_a montre que $f_a([0,1]) = \left[0, \dfrac{a}{4}\right] \subset [0,1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition « $v_n \in [0,1]$ ».

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

- Initialisation : d'après l'énoncé $v_0 \in [0,1]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

  Par hypothèse de récurrence, on sait que $u_n \in [0,1]$ donc

  $$v_{n+1} = f_a(v_n) \in f_a([0,1]) = \left[0, \frac{a}{4}\right] \subset [0,1].$$

  Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie c'est-à-dire :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \in [0,1].$$

(b) D'après la question précédente et la question 1.b) on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = f_a(v_n) - v_n = g_a(v_n) \leq 0.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

3. **(a)** D'après les questions précédentes, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Par le théorème de convergence monotone, elle est donc convergente.

On note ℓ sa limite.

(b) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq v_n \leq 1$.

Comme le passage à la limite préserve les inégalités larges, on en déduit : $0 \leq \ell \leq 1$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f_a(v_n)$ et f_a est continue sur $[0,1]$ donc, en particulier, en ℓ. En passant à la limite on obtient, par unicité de la limite :

$$\ell = f_a(\ell).$$

(c) Soit $x \in [0,1]$.

$$f_a(x) = x \iff g_a(x) = 0 \iff x = 0 \quad \text{d'après 1.b.}$$

Ainsi on a nécessairement $\ell = 0$.
Cela signifie que la population étudiée finit par s'éteindre.

Le cas $a = \dfrac{5}{2}$.

Dans cette partie, on suppose que $a = \dfrac{5}{2}$ et que $v_0 = \dfrac{1}{2}$. On note f, g et h les fonctions définies sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \frac{5}{2}x(1-x) \quad ; \quad g(x) = f(x) - x \quad \text{et} \quad h(x) = f \circ f(x) - x.$$

4. On trouve :

$$v_1 = f(v_0) = \frac{5}{8} \quad ; \quad v_2 = f(v_1) = \frac{75}{128} \quad ; \quad v_3 = f(v_2) = \frac{5 \cdot 75 \cdot 53}{2 \cdot 128^2}.$$

5. Écrire une fonction `Python` qui prend en argument un entier naturel n et renvoie la valeur de v_n :

```python
def v(n):
    v=1/2
    for k in range(n):
        v = 5/2*v*(1-v)
    return v
```

6. (a) Soit $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} f(x) = x \iff \frac{5}{2}x(1-x) = x \iff x\left(\frac{5}{2}(1-x) - 1\right) = 0 \\ \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{3}{2} - \frac{5}{2}x = 0 \\ \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Ainsi f admet exactement deux points fixes sur $[0,1]$: 0 et $\dfrac{3}{5}$.

(b) Soit $x \in [0,1]$. On a d'une part :

$$\begin{aligned} h(x) = f(f(x)) - x = \frac{5}{2}f(x)(1-f(x)) - x &= \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}x(1-x)\left(1 - \frac{5}{2}x(1-x)\right) - x \\ &= \frac{25x(1-x)(2-5x(1-x)) - 8x}{8} \\ &= \frac{x\,(25(1-x)(2-5x(1-x)) - 8)}{8} \end{aligned}$$

avec :

$$25(1-x)(2-5x(1-x)) - 8 = -125x^3 + 250x^2 - 175x + 42.$$

D'autre part, on a :

$$(5x-3)(25x^2-35x+14) = 125x^3-250x^2+175x-42 = -(25(1-x)(2-5x(1-x))-8).$$

Finalement on obtient bien :

$$h(x) = \frac{x\,(25(1-x)(2-5x(1-x))-8)}{8} = -\frac{x(5x-3)(25x^2-35x+14)}{8}.$$

(c) Soit $x \in [0,1]$. On a :

$$\begin{aligned} f \circ f(x) = x \iff h(x) = 0 &\iff x = 0 \text{ ou } 5x-3 = 0 \text{ ou } 25x^2-35x+14 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{5} \text{ ou } 25x^2-35x+14 = 0. \end{aligned}$$

Or le discriminant de $25x^2 - 35x + 14$ vaut $-7 \times 25 < 0$ donc l'équation $25x^2 - 35x + 14 = 0$ n'a pas de solution réelle.

Ainsi les points fixes de $f \circ f$ sont 0 et $\frac{3}{5}$; les mêmes que f d'après 6.a.

(d) D'après la question précédente, on sait que pour tout $x \in [0,1]$, $25x^2 - 35x + 14 > 0$.

Le signe de $h(x)$ dépend donc du signe de $-x(5x-3)$. On en déduit :

x	0		$\frac{3}{5}$
Signe de $h(x)$	0	$+$	0

7. **(a)** Soit $x \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$, montrons que $f \circ f(x) \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

Les variations de f changent en $\frac{1}{2}$ (voir question 1.a qui reste valable). On va donc distinguer deux cas.

— Si $x \in \left[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right]$. Par croissance de f sur cet intervalle :

$$\frac{3}{5} = f\left(\frac{2}{5}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}.$$

Or sur l'intervalle $\left[\frac{3}{5}, \frac{5}{8}\right]$, f est décroissante, donc :

$$\frac{75}{128} = f\left(\frac{5}{8}\right) \leq f \circ f(x) \leq f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}.$$

Or $\frac{2}{5} < \frac{75}{128} = f\left(\frac{5}{8}\right)$ donc $f \circ f(x)$ appartient bien à l'intervalle $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

— Si $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$. Par décroissance de f sur cet intervalle :

$$\frac{3}{5} = f\left(\frac{3}{5}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}.$$

Or sur l'intervalle $\left[\frac{3}{5}, \frac{5}{8}\right]$, f est décroissante, donc :

$$\frac{75}{128} = f\left(\frac{5}{8}\right) \leq f \circ f(x) \leq f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}.$$

Or $\frac{2}{5} < \frac{75}{128} = f\left(\frac{5}{8}\right)$ donc $f \circ f(x)$ appartient bien à l'intervalle $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

Finalement, on a bien : $f \circ f\left(\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]\right) \subset \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après les questions précédentes :

$$v_{2(n+1)} - v_{2n} = h(v_{2n}) \geq 0.$$

Ainsi la suite $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{2(n+1)} = f \circ f(v_{2n})$ en reprenant la méthode de la question 2.a, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{2n} \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

Ainsi, $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc d'après le théorème de converge monotone, elle converge. Notons ℓ sa limite.

En raisonnant comme à la question 3.b, on montre que $\ell \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ et est un point fixe de $f \circ f$.

Ainsi $\ell = \frac{3}{5}$.

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{2n+1} = f(v_{2n}).$$

Par continuité de f en $\frac{3}{5}$, on en déduit que $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$.

(e) Les suites $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $\frac{3}{5}$ donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est converge vers cette limite également.

8. La population initiale u_0 est $\frac{M}{2}$ et la population vers $\frac{3}{5}M$ soit 120% de sa taille initiale.

Partie 2–Le modèle logistique continu

Dans cette partie, on modélise l'évolution de la population par une fonction. La taille de la population à l'instant $t \in \mathbb{R}_+$ est représentée par le réel $y(t)$ où y désigne une fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

On suppose que la taille de la population est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un réel strictement positif M tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 < y(t) < M.$$

On suppose que y est de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'il existe un réel $a > 0$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad y'(t) = ay(t)(M - y(t)).$$

9. **(a)** En mettant le membre de droite au même dénominateur et en identifiant les numérateurs des deux membres, on trouve $\alpha = \beta = \dfrac{1}{M}$. Par hypothèse, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $y(t)$ et $M - y(t)$ sont non nuls donc en divisant l'équation initiale par $y(t)(M - y(t))$ on a :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad y'(t) = ay(t)(M - y(t)) &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \frac{y'(t)}{y(t)(M - y(t))} = a \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \alpha\frac{y'(t)}{y(t)} + \beta\frac{y'(t)}{M - y(t)} = a.\end{aligned}$$

Ainsi y vérifie l'équation :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \alpha\frac{y'(t)}{y(t)} + \beta\frac{y'(t)}{M - y(t)} - a = 0.$$

(b) Une primitive est donnée par :

$$t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \alpha \ln(|y(t)|) - \beta \ln|M - y(t)| - at.$$

Mais par hypothèse on sait que pour tout $t \in \mathbb{R}_+ : 0 < y() < M$ d'où on déduit la primitive suivante :

$$t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \alpha \ln(y(t)) - \beta \ln(M - y(t)) - at.$$

10. D'après les questions précédentes, la fonction $t \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \alpha \ln(y(t)) - \beta \ln(M - y(t)) - at$ est de dérivée nulle sur $\mathbb{R}_+$ donc il s'agit d'une fonction constante. Il existe donc un réel d tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \alpha \ln(y(t)) - \beta \ln(M - y(t)) - at = d.$$

En se souvenant que $\alpha = \beta = \dfrac{1}{M}$ on a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \ln(y(t)) - \ln(M - y(t)) - aMt = Md.$$

En passant à l'exponentielle il vient :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \frac{y(t)}{M - y(t)} e^{-aMt} = e^{Md}.$$

Finalement, si on pose $c = e^{Md}$, en isolant $y(t)$, on trouve bien que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$y(t) = \frac{cMe^{aMt}}{1 + ce^{aMt}}.$$

11. D'après la question précédente $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = M$.

La population croît jusqu'à atteindre son maximum théorique.

Partie 3–Le modèle proies-prédateurs discret

Dans cette partie, on souhaite modéliser l'évolution conjointe de deux populations : une population de lièvres, qui constituent des proies et une population de lynx, qui sont des prédateurs des lièvres.
La population de lièvres est modélisée par une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la population de lynx par une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On fait les hypothèses suivantes

- le taux d'accroissement des proies résulte d'un taux de natalité constant a et d'un taux de mortalité by_n proportionnel au nombre de prédateurs.
- le taux d'accroissement des prédateurs résulte d'un taux de natalité cx_n proportionnel au nombre de proies, et d'un taux de mortalité constant b

où a, b, c et d sont des réels strictement positifs.
On obtient alors les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} &= (1+a)x_n - by_nx_n \\ y_{n+1} &= (1-d)y_n + cx_ny_n \end{cases} \tag{1}$$

12. À un instant n, le taux d'accroissement des proies est : $\dfrac{x_{n+1}-x_n}{x_n}$. D'après les hypothèses :

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n} = a - by_n$$

et on obtient donc : $x_{n+1} = x_n + x_n(a-by_n) = (1+a)x_n - by_nx_n$. De même le taux d'accroissement des prédateurs est : $\dfrac{y_{n+1}-y_n}{y_n}$. D'après les hypothèses :

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{y_n} = cx_n - d$$

et on obtient donc : $y_{n+1} = y_n + y_n(cx_n-d) = (1-d)y_n + cy_nx_n$.

13. En calculant (x_1, y_1) on remarque que $(x_1,y_1) = (x_0,y_0)$. On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x_n,y_n) = (x_0,y_0)$.

En effet, si $(x_n,y_n) = \left(\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{b}\right)$ alors :

$$x_{n+1} = (1+a)\frac{d}{c} - b\frac{d}{c}\times\frac{a}{b} = \frac{d}{c} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = (1-d)\frac{a}{b} + c\frac{d}{c}\times\frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

Les suites (x_n) et (y_n) sont donc constantes.

14. **(a)** Écrire une fonction Python `Population` qui prend en argument x_0, y_0 et n, et qui renvoie le couple (x_n, y_n).

```
def Population(x0,y0,n):
    x = x0
    y = y0
    for k in range(n):
        xold = x # garde en memoire la valeur de xn pour les calculs
suivants
        x = (1+a)*x-b*x*y
        y = (1-d)*y+c*old*y
    return (x,y)
```

(b) Compléter le programme suivant pour qu'il trace la représentation graphique des suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ en fonction de $n \in [\![0, 150]\!]$.

```
a,b,c,d = 0.08 ,  0.00002 ,0.000008 ,0.5
x0, y0 = 62000, 3800

X = [x0]
Y = [y0]

for k in range(1,151):
         X.append(Population(x0,y0,k)[0])
         Y.append(Population(x0,y0,k)[1])

plt.plot(X)
plt.plot(Y)
plt.show()
```

(c) `import matplotlib.pyplot as plt`

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = x_n - \dfrac{d}{c}$ et $v_n = y_n - \dfrac{a}{b}$.

15. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = x_{n+1} - \frac{d}{c} &= (1+a)x_n - by_nx_n - \frac{d}{c} \\ &= (1+a)\left(u_n + \frac{d}{c}\right) - b\left(u_n + \frac{d}{c}\right)\left(v_n + \frac{a}{b}\right) - \frac{d}{c} \\ &= u_n - bv_nu_n - \frac{bd}{c}v_n. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} v_{n+1} = y_{n+1} - \frac{a}{b} &= (1-d)y_n + cy_nx_n - \frac{a}{b} \\ &= (1-d)\left(v_n + \frac{a}{b}\right) + c\left(u_n + \frac{d}{c}\right)\left(v_n + \frac{a}{b}\right) - \frac{a}{bc} \\ &= v_n + cu_nv_n + \frac{ca}{b}v_n. \end{aligned}$$

On pose alors $A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

16. **(a)** D'après les hypothèses on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= u_n - \alpha v_n \\ v_{n+1} &= v_n + \alpha u_n \end{cases}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

(b) Une récurrence donne alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

17. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$.

(a) Comme $\det(P) = 2i \neq 0$, la matrice P est inversible et son inverse est donné par :

$$P^{-1} = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i & -1 \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Un calcul permet de vérifier que $A = P\begin{pmatrix} 1+i\alpha & 0 \\ 0 & 1-i\alpha \end{pmatrix}P^{-1}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc (à montrer par récurrence si ce n'est pas su !) :

$$A^n = P\begin{pmatrix} (1+i\alpha)^n & 0 \\ 0 & (1-i\alpha)^n \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Un calcul montre alors que :

$$A^n = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} i\left((1+i\alpha)^n + (1-i\alpha)^n\right) & -(1+i\alpha)^n + (1-i\alpha)^n \\ (1+i\alpha)^n - (1-i\alpha)^n & i\left((1+i\alpha)^n + (1-i\alpha)^n\right) \end{pmatrix}.$$

18. On écrit $1 + i\alpha$ sous forme exponentielle : il existe $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que :

$$1 + i\alpha = re^{i\theta}.$$

Son conjugué $1 - i\alpha$ s'écrit alors $re^{-i\theta}$. Les formules d'Euler donnent alors :

$$A^n = \frac{r^n}{2i}\begin{pmatrix} i(e^{in\theta} + e^{-in\theta}) & -e^{in\theta} + e^{-in\theta} \\ e^{in\theta} - e^{-in\theta} & i(e^{in\theta} + e^{-in\theta}) \end{pmatrix} = r^n\begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}.$$

La question 16.b permet alors de conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_n = r^n(\cos(n\theta)u_0 - \sin(n\theta)v_0) \\ v_n = r^n(\cos(n\theta)v_0 + \sin(n\theta)u_0) \end{cases}$$