Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD2

Intégrales généralisées

1 Applications directes du cours

Exercice 1. Étudier la nature des intégrales suivantes et le cas échéant, calculer leur valeur :

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt,$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{t}{(1+t^2)^2}dt,$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx,$
4. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}dt.$

Exercice 2. Étudier la nature des intégrales suivantes et le cas échéant, calculer leur valeur :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx,$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}dt,$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx,$
4. $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{t-1}dt.$

Exercice 3. Déterminer la nature, et le cas échéant la valeur, des intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-u}du\,;$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx\,;$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}dt$ en posant $u=\ln(t)\,;$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}du$ en posant $u=\cos(t)$.

Exercice 4. Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$A=\int_1^{+\infty}\frac{x\ dx}{\sqrt{x^3+1}},\ B=\int_0^{+\infty} t^5\,e^{-t^2}\ dt,\ C=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$D=\int_1^{+\infty}\sin t\ e^{-2t}\ dt,\ E=\int_0^1\frac{\sin x - x}{1-\cos x}\ dx.$$

Exercice 5. Déterminer la nature des intégrales suivantes en utilisant le théorème de comparaison.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{t+\sqrt{t}}dt\,;$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t+e^{-t}}.$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt,$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}dt,$
5. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3\ln(t)}dt.$

Exercice 6. Déterminer la nature des intégrales suivantes en utilisant le critère d'équivalent.

1. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{t^2+t}}dt\,;$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{t}}{e^t-1-t}dt.$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}dt.$

Exercice 7. Étudier la nature des intégrales suivantes en utilisant le théorème d'équivalence.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2+2t}{t^4+1}dt,$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1}dx,$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt,$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\frac{1}{t}}{e^{\frac{1}{t}}-1}dt,$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}}dt,$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt.$

Exercice 8. Soit $a > 0$.

1. **Intégrales de Riemann**
   (a) Discuter suivant la valeur du paramètre a de la convergence de l'intégrale
   $$\int_0^1 \frac{dt}{t^a}$$
   et donner, en cas de convergence, sa valeur.
   (b) Idem avec les intégrales
   $$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^a}.$$

2. **Intégrales de Bertrand**
   (a) Discuter suivant la valeur du paramètre a de la convergence de l'intégrale
   $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t|\ln t|^a}$$
   et donner, en cas de convergence, sa valeur.
   Indication : faire un changement de variables.

   (b) Idem avec l'intégrale
   $$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t|\ln t|^\alpha}.$$
   (c) En comparant $\ln(1+u)$ et u lorsque $u \in [0,1]$, donner la nature de l'intégrale, suivant les valeurs de a :
   $$\int_1^2 \frac{dt}{t(\ln t)^a}.$$
   (d) Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t|\ln t|^\alpha}$?
   (e) Discuter de la nature des intégrales généralisées
   $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^a|\ln t|^b} \quad \text{et} \quad \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a|\ln t|^b}$$
   lorsque $a \in]0,+\infty[\backslash\{-1\}$ et b réel.
   Indication : comparer l'intégrande avec $t^{-a'}$ où a' du même côté de 1 que a.

2 Autres

Exercice 9. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2}\, dt.$$

1. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que f est paire.
3. À l'aide d'un changement de variable judicieux, démontrer qu'il existe K dans $\mathbb{R}$ tel que, pour tout réel x, $f(x) = K|x|$ (on ne demande pas de calculer K, on peut montrer que $K = \pi/2$).

Exercice 10. 1. Justifier la convergence et donner la valeur de l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

2. Déterminer, avec le minimum de calcul la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

   où $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\, dt}{(1+t^2)^{n+1}}$.
   (a) Vérifier que $J_n + I_{n+1} = I_n$.
   (b) Montrer par une IPP que $J_n = \dfrac{1}{2n} I_n$.
   (c) En déduire une relation de récurrence vérifiée par la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis une formule directe pour I_n en fonction de n.

Exercice 11. 1. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt$ est-elle convergente ?

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction H_n définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k.x)}{k}$$

   Montrer rapidement que H_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, préciser sa valeur en 0.

3. Tracer, en Python, le graphe de H_n pour quelques valeurs de n s'échelonnant de 2 à 25.
4. Que vaut la limite lorsque $n \to +\infty$ de $H_n(\dfrac{1}{n})$? Est-elle nulle ?

Exercice 12. 1. Montrer que pour $x > 0$, l'intégrale

$$J(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

   est convergente.

2. (a) Montrer que $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$.

   (b) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que $J(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}$.

Exercice 13. Soit $I_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin x . e^{-x} \, dx$.

Grâce à un changement de variables, calculer I_n en fonction de I_0. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x . e^{-x} \, dx$ est convergente et calculer sa valeur.