Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD2

Intégrales généralisées

1 Applications directes du cours

Correction de l'exercice 1.

1. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t-1}}$ est définie et continue sur $[2, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
   Soit $A \in [2, +\infty[$. On a :
   $$\int_2^A \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt = \left[2\sqrt{t-1}\right]_2^A = 2\sqrt{A-1} - 2.$$
   Donc : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_2^A \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt = +\infty$.
   Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$ est divergente.
2. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $]-\infty, 0]$ donc l'intégrale est impropre en $-\infty$.
   Soit $A \in]-\infty, 0]$. Alors on a :
   $$\int_A^0 \frac{t}{(1+t^2)^2}dt = \left[-\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}\right]_A^0 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+A^2} - 1\right).$$
   Donc : $\displaystyle\lim_{A\to-\infty} \int_A^0 \frac{t}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2}$.
   Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{t}{(1+t^2)^2}dt$ est convergente et vaut $-\dfrac{1}{2}$.
3. La fonction $x \mapsto xe^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.
   - Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}dx$ impropre en $-\infty$.
     Soit $A \in]-\infty, 0]$. On a :
     $$\int_A^0 xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_A^0 = -\frac{1}{2}(1 - e^{-A^2}).$$
     Ainsi : $\displaystyle\lim_{A\to-\infty} \int_A^0 xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}$.
     L'intégrale converge donc et vaut $-\dfrac{1}{2}$.

- Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ impropre en $+\infty$.
  Soit $A \in [0, +\infty[$. On a :

$$\int_0^A xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^A = -\frac{1}{2}(e^{-A^2} - 1).$$

  Ainsi : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$.
  L'intégrale converge donc et vaut $\dfrac{1}{2}$.
- Conclusion : comme les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ convergent alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}dx + \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = 0.$$

4. La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{2-t^2}}$ est continue sur $[0, \sqrt{2}[$ donc la l'intégrale est impropre en $\sqrt{2}$. Soit $A \in [0, \sqrt{2}[$. Pour tout $t \in [0, \sqrt{2}[$, on a

$$\frac{t}{\sqrt{2-t^2}} = -\frac{1}{2}\frac{-2t}{\sqrt{2-t^2}} = -\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

   où $u : t \mapsto 2 - t^2$ est continue et positive sur $[0, A]$. Ainsi,

$$\int_0^A \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}dt = -\left[\sqrt{2-t^2}\right]_0^A = -\sqrt{2-A^2} + \sqrt{2}.$$

   Donc

$$\lim_{A\to\sqrt{2}^-} \int_0^A \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}dt = \lim_{A\to\sqrt{2}^-} -\sqrt{2-A^2} + \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

   Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{t}{\sqrt{2-t^2}}dt$ converge et vaut $\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 2.

1. La fonction $f : x \mapsto xe^{-x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
   Soit $A \in [0, +\infty[$. Alors on a :

$$\int_0^A xe^{-x^2}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^A = \frac{1}{2}(1 - e^{-A^2}).$$

   Donc : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$.
   Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$.

2. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+e^t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Soit $A \in [0, +\infty[$.

   - **Méthode 1 :** la fonction $u : t \mapsto e^t$ est de classe C^1 sur $[0, A]$, en effectuant le changement de variable $u = e^t$ on obtient :

$$\int_0^A \frac{1}{1+e^t}dt = \int_0^A \frac{1}{e^t(1+e^t)}e^t dt = \int_0^A \frac{1}{u(t)(1+u(t))}u'(t)dt = \int_1^{e^A} \frac{1}{u(1+u)}du.$$

   Or, pour tout $u \geq 1$: $\dfrac{1}{u(u+1)} = \dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{u+1}$. Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^A \frac{1}{1+e^t}dt &= \int_1^{e^A} \frac{1}{u(1+u)}du \\ &= \int_1^{e^A} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right) du \\ &= [\ln(u) - \ln(u+1)]_1^{e^A} \\ &= A - \ln(1+e^A) + \ln(2) \\ &= \ln(2) - \ln(1+e^{-A}).\end{aligned}$$

   - **Méthode 2 :** on a : $\forall t \geq 0$, $\dfrac{1}{1+e^t} = \dfrac{e^{-t}}{1+e^{-t}}$. Donc :

$$\int_0^A \frac{1}{1+e^t}dt = \int_0^A \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}dt = \left[-\ln(1+e^{-t})\right]_0^A = \ln(2) - \ln(1+e^{-A}).$$

   - **Conclusion :** $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{1}{1+e^t}dt = \ln(2)$.
   Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}dt$ est convergente et vaut $\ln(2)$.

3. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2(1+|x|)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.

   - Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx$ impropre en $-\infty$.
   Soit $A \in]-\infty, 0]$. On a :

$$\int_A^0 \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx = \int_A^0 \frac{1}{2(1-x)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x}\right]_A^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1-A)}.$$

   Ainsi : $\displaystyle\lim_{A\to-\infty} \int_A^0 \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx = \frac{1}{2}$.
   L'intégrale converge donc et vaut $\dfrac{1}{2}$.

- Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx$ impropre en $+\infty$.
  Soit $A \in [0, +\infty[$. On a :
  $$\int_0^A \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx = \int_0^A \frac{1}{2(1+x)^2} = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+A)}.$$
  Ainsi : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx = \frac{1}{2}$.
  L'intégrale converge donc et vaut $\frac{1}{2}$.
- Conclusion : comme les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx$ convergent alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx$ converge et :
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2(1+|x|)^2}dx = 1.$$

4. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t-1}$ est continue sur $]1, 2]$ donc l'intégrale est impropre en 1.
   Soit $A \in]1, 2]$. Alors on a :
   $$\int_A^2 \frac{1}{t-1}dt = [\ln(t-1)]_A^2 = -\ln(A-1) \xrightarrow[A\to1]{} +\infty.$$
   Ainsi l'intégrale est divergente.

Correction de l'exercice 3.

1. La fonction $u \mapsto ue^{-u}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $A \in [0, +\infty[$. Alors, comme les fonctions $u \mapsto u$ et $u \mapsto -e^{-u}$ sont de classe C^1 sur $[0, A]$, par intégration par parties on trouve :
   $$\int_0^A ue^{-u}du = \left[-ue^{-u}\right]_0^A - \int_0^A -e^{-u}du = -Ae^{-A} - e^{-A} + 1.$$
   Ainsi,
   $$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A ue^{-u}du = \lim_{A\to+\infty} -Ae^{-A} - e^{-A} + 1 = 1.$$
   Par conséquent, $\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-u}du$ converge et sa valeur est 1.
2. La fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $A \in [1, +\infty[$.
   Les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par intégration par parties on a :
   $$\begin{aligned}\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}dx &= \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^A - \int_1^A \frac{-1}{x} \times \frac{1}{x}dx \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} + \left[\frac{-1}{x}\right]_1^A \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} + \frac{-1}{A} + 1.\end{aligned}$$

Ainsi : $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}dx = 1$.
Donc l'intégrale converge et vaut 1.

3. La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $A \in [1,+\infty[$. La fonction $u : t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[1, A]$ donc, en effectuant le changement de variable $u = \ln(t)$ et en utilisant la question 1, on obtient :

$$\int_1^A \frac{\ln(t)}{t^2}dt = \int_1^A \frac{u(t)}{e^{u(t)}}u'(t)dt = \int_0^{\ln A} \frac{u}{e^u}du = \int_0^{\ln A} ue^{-u}du = -\frac{\ln A}{A} - \frac{1}{A} + 1$$

en réutilisant la question précédente. Ainsi,

$$\lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\ln(t)}{t^2}dt = \lim_{A\to+\infty} -\frac{\ln A}{A} - \frac{1}{A} + 1 = 1.$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}dt$ converge et vaut 1.

4. La fonction $u \mapsto \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$ est continue sur $[0, 1[$ donc l'intégrale est impropre en 1. La fonction $u : t \mapsto \cos(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ donc, en effectuant le changement de variable $u = \cos(t)$, les intégrales

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}du \quad \text{et} \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\frac{1+\cos(t)}{1-\cos(t)}} \times (-\sin(t))dt$$

sont de même nature. Or :

$$1+\cos(t) = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \quad \text{et} \quad 1-\cos(t) = 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right).$$

L'étude revient à l'étude de l'intégrale :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left|\frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right| \times (-\sin(t))dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)dt$$

car $\sin(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$. Enfin, cette dernière intégrale est une intégrale de fonction continue sur un segment et :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t)+1)dt \\ &= [\sin(t)+t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1+\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Donc $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}du$ converge et vaut $1+\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 4.

1. $A = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^3+1}}$.
   (a) L'intégrande $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^3+1}}$ est continue sur $[1+\infty[$. La question de la nature de l'intégrale généralisée en question à un sens, elle a une singularité en $+\infty$.
   (b) On a :
   $$\frac{x}{\sqrt{x^3+1}} \underset{x\to+\infty}{\sim} x\cdot x^{-\frac{3}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}$$
   et donc , par le théorème d'équivalence pour les intégrales généralisées à intégrande positive, A et $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}\,dx$ sont de même nature.
   Or cette dernière diverge vers $+\infty$ (une primitive est $\sqrt{x}$, qui a pour limite $+\infty$ en ∞).
   Finalement $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^3+1}}$ est divergente.
2. $B = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^5.e^{-t^2}\,dt$.
   (a) L'intégrande $t \mapsto t^5.e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. La question de la nature de l'intégrale généralisée en question à un sens, elle a une singularité en $+\infty$.
   (b) On a, lorsque $t \to +\infty$, par croissance comparées,
   $$\frac{t^5.e^{-t^2}}{e^{-t}} \to 0$$
   et donc, il existe $T \geq 1$ tel que
   $$\forall x \geq T,\ 0 \leq t^5.e^{-t^2} \leq e^{-t}$$
   Or $\displaystyle\int_T^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge (vers e^{-T}) et donc, par le théorème de comparaison pour les intégrales généralisées à intégrande positive, $\displaystyle\int_T^{+\infty} t^5.e^{-t^2}\,dt$ converge et par Chasles, il en est de même pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^5.e^{-t^2}\,dt$.
3. $C = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.
   (a) L'intégrande $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ est continue sur $]0,1[$ (elle tend vers $+\infty$ à chacune des extrémités), il est légitime de considérer la question de la convergence de l'intégralisée qui a deux singularités, l'une en 0, l'autre en $+1$. On traite la nature de chacune des intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}$ et $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1$ séparémment.
   (b) Convergence de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}$ ....

Si $0 < x < \frac{1}{2}$ alors $\sqrt{1-x} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc :

$$\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right], \ 0 \leq \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \leq \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Or l'intégrale généralisée $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ est convergente (une primitive de l'intégrande est $Cst \times \sqrt{x}$, qui a une limite en 0^+)et donc, par le théorème de comparaison pour les intégrales généralisées à intégrande positive, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ est convergente.

(c) Convergence de $\int_{\frac{1}{2}}^1$ .... Sur le même modèle, on a

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[, \ 0 \leq \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \leq \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

Or l'intégrale généralisée $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$ est convergente (une primitive de l'intégrande est $Cst \times \sqrt{1-x}$, qui a une limite en 1^-)et donc, par le théorème de comparaison pour les intégrales généralisées à intégrande positive, $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ est convergente.

(d) Convergence de $C = \int_0^1$ .... Comme $\int_{\frac{1}{2}}^1$ ... et $\int_0^{\frac{1}{2}}$ ... sont convergentes, par définition , l'intégrale généralisée a deux singularités, $\int_0^1$ ... est convergente.

4. $D = \int_1^{+\infty} \sin t.e^{-2t}\, dt.$

(a) L'intégrande $t \mapsto \sin t.e^{-2t}$ est continue sur $[1, +\infty[$. La question de la nature de l'intégrale généralisée en question à un sens, elle a une singularité en $+\infty$.

(b) On a, du fait que $|\sin t| \leq 1$,

$$\forall t \geq 0, \ 0 \leq \left|\sin t.e^{-2t}\right| \leq e^{-2t}$$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-2t}\, dt$ converge (vers $\frac{1}{2}$) et donc, par le théorème de comparaison pour les intégrales généralisées à intégrande positive, $\int_0^{+\infty} \sin t.e^{-2t}\, dt$ est absolument convergente et donc convergente.

Remarques :

— On a de plus, le nombre $\int_0^{+\infty} \sin t.e^{-2t}\, dt$ étant bien défini par ce qui vient d'être dit, que

$$\left|\int_0^{+\infty} \sin t.e^{-2t}\, dt\right| \leq \frac{1}{2}$$

— On peut mener le calcul exact de cette intégrale (en passant en complexes ou par deux ipp), ce n'est pas la question ici.

5. $E = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x - x}{1-\cos x}\, dx$.

   (a) L'intégrande $x \mapsto \dfrac{\sin x - x}{1-\cos x}$ est continue sur $]0,1]$, car, sur cet intervalle $1-\cos x$ ne s'annule pas (annulation pour $x=0$ puis $x = 2.\pi > 1$. La question de la nature de l'intégrale généralisée en question à un sens, elle a *a priori* une singularité en 0.

   (b) Examinons le comportement de l'intégrande en 0. On a, lorsque $x \to 0$,

   $$\sin x - x \sim -\frac{1}{6}x^3,\ 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

   et donc

   $$\frac{\sin x - x}{1-\cos x} \sim -\frac{1}{3}x \to 0^+$$

   L'intégrande se prolonge par continuité en 0^+. On a onc affaire à une intégrale faussement généralisée (elle est convergente, c'est une intégrale classique)

Correction de l'exercice 5. 1. La fonction $t \mapsto \dfrac{t}{t+\sqrt{t}}$ est continue sur $[1,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
Soit $t \geq 1$. Alors $\sqrt{t} \leq t$ donc

$$t + \sqrt{t} \leq 2t$$

et par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$ on en déduit :

$$\forall t \in [1,+\infty[, \quad \frac{t}{t+\sqrt{t}} \geq \frac{1}{2}.$$

Les fonctions $t \mapsto \dfrac{t}{t+\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{2}$ sont continues et positives sur $[1,+\infty[$ donc, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2}dt$ diverge, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{t+\sqrt{t}}dt$ diverge aussi.

2. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{e^t+e^{-t}}$ est continue sur $[1,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Or,

$$\forall t \geq 1, \quad \frac{1}{e^t+e^{-t}} \leq \frac{1}{e^t} = e^{-t}.$$

Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{e^t+e^{-t}}$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont continues et positives sur $[1,+\infty[$ donc, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ converge (exemple de référence), l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t+e^{-t}}$ converge aussi.

3. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^n}$ est continue sur $[1,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.

- Si $n \geq 2$. Pour tout $t \in [1, +\infty[$ on a

$$1 + t + t^n \geq t^n \quad \text{donc} \quad \frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{t^n}.$$

Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^n}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^n}$ sont continues, positives sur $[1, +\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt$ est une intégrale convergente car $n > 1$ (faire le calcul explicite). D'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$ converge aussi.

- Si $n = 1$. Pour tout $t \in [1, +\infty[$ on a

$$1 + t + t^n = 1 + 2t \leq 3t \quad \text{donc} \quad \frac{1}{1+t+t^n} \geq \frac{1}{3t}.$$

Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{1+t+t^n}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{3t}$ sont continues, positives sur $[1, +\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{3t} dt$ est une intégrale divergente (faire le calcul explicite). D'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$ diverge aussi.

- Si $n = 0$. Pour tout $t \in [1, +\infty[$ on a

$$1 + t + t^n = 2 + t \leq 3t \quad \text{donc} \quad \frac{1}{1+t+t^n} \geq \frac{1}{3t}.$$

Et on conclut comme précédemment que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$ diverge.

4. La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $[1, +\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.
De plus, pour tout $t \geq e$ on a
$$\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \geq \frac{1}{\sqrt{t}}.$$
Les fonctions $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{t}}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ sont continues, positives sur $[1, +\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ est une intégrale divergente (faire le calcul explicite). D'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$ diverge.

5. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^3 \ln(t)}$ est continue sur $[2, +\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.
De plus, pour tout $t \geq 2$ on a
$$\frac{1}{t^3 \ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(2) t^3}.$$

Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t^3 \ln(t)}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^3 \ln(2)}$ sont continues, positives sur $[2, +\infty[$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3 \ln(2)} dt$ est une intégrale convergente (faire le calcul explicite). D'après le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^3 \ln(t)} dt$ converge aussi.

Correction de l'exercice 6.

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+t}}$ est continue sur $]0, 1]$. L'intégrale est impropre en 0.
   - $\sqrt{t^2+t} \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{t}$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{t^2+t}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$;
   - les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+t}}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ sont continues et positives sur $]0, 1]$

   D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+t}} dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ sont de même nature. Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge (faire le calcul explicite), l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+t}} dt$ converge aussi.

2. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{e^t - 1 - t}$ est continue sur $]0, 1]$. L'intégrale est impropre en 0.
   - par DL usuels, on sait que
   $$e^t - 1 - t = \frac{t^2}{2} + \underset{n\to+\infty}{o} 0(t^2).$$
   En particulier, $e^t - 1 - t \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$ et par compatibilité de la relation d'équivalence avec le passage au quotient, on déduit l'équivalent suivant
   $$\frac{\sqrt{t}}{e^t - 1 - t} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}}.$$
   - les fonctions $t \mapsto \dfrac{\sqrt{t}}{e^t - 1 - t}$ et $t \mapsto \dfrac{2}{t^{\frac{3}{2}}}$ sont continues et positives sur $]0, 1]$.

   D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1 - t} dt$ sont de même nature. Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{t^{\frac{3}{2}}} dt$ diverge (faire le calcul explicite), l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1 - t} dt$ diverge aussi.

3. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+1}$ est continue sur $[0, +\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.
   - $t^2 + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} t^2$ donc $\dfrac{1}{t^2+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$;
   - les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+1}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$.

D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ sont de même nature. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (faire le calcul explicite), l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}dt$ converge aussi.
Enfin, comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^2+1}$ est continue sur $[0,1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt$ est bien définie et par la relation de Chasles on déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1}dt$ converge.
Attention : on ne peut pas appliquer directement le critère sur $[0,+\infty[$ car la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ n'est pas continue sur $[0,+\infty[$ (elle n'est pas définie en 0 !) et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ diverge.

Correction de l'exercice 7.

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{t^2+2t}{t^4+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$. De plus, par équivalent usuel et compatibilité des équivalents avec le quotient on a :
$$\frac{t^2+2t}{t^4+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$
Les fonctions $t \mapsto \dfrac{t^2+2t}{t^4+1}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sont continues, positives sur $[1,+\infty[$. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2+2t}{t^4+1}dt$ sont de même nature. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est une intégrale convergente, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2+2t}{t^4+1}dt$ converge aussi.
Comme de plus, $t \mapsto \dfrac{t^2+2t}{t^4+1}$ est continue sur $[0,1]$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2+2t}{t^4+1}dt$ existe.
Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2+2t}{t^4+1}$ converge.
Attention : on ne peut pas appliquer directement le critère sur $[0,+\infty[$ car la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ n'est pas continue sur $[0,+\infty[$ (elle n'est pas définie en 0 !).

2. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car pour tout réel x, $x^2-x+1>0$. L'intégrale est donc impropre en $-\infty$ et en $+\infty$.
   - Étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2-x+1}dx$.
     Par équivalent usuel et compatibilité des équivalents avec le quotient on a :
     $$\frac{1}{x^2-x+1} \underset{x\to-\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$
     Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-x+1}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sont continues, positives sur $]-\infty,-1]$. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions conti-

nues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2-x+1}dx$ sont de même nature. Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}dx$ est une intégrale convergente, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2-x+1}dx$ converge aussi.

Comme de plus, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-x+1}$ est continue sur $[-1,0]$ l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-x+1}dx$ existe.

Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2-x+1}dx$ converge donc.

- On montre de la même façon que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1}dx$ converge.
- Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2-x+1}dx$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1}dx$ convergent alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-x+1}dx$ converge.

3. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$. L'intégrale est impropre en -1 et en 1.
   - Étude de $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$.

     On a :

     $$\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{(1-t)(1+t)}} \underset{t\to -1^+}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{t+1}}.$$

     Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{t+1}}$ sont continues et positives sur $]-1,0]$.

     D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$ et $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+t}}dt$ sont de même nature.

     Soit $A \in]-1,0]$. On a

     $$\int_{A}^{0} \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+t}}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{1+t}\right]_A^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{1+A}}{\sqrt{2}}.$$

     Ainsi $\displaystyle\lim_{A\to -1^+} \int_{A}^{0} \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+t}}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}$. En particulier, $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1+t}}dt$ converge et donc $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$ converge aussi.
   - On montre de même que $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$ converge.
   - Comme $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$ convergent, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+t^2)\sqrt{1-t^2}}dt$ converge.
4. La fonction $t \mapsto \dfrac{\frac{1}{t}}{e^{\frac{1}{t}}-1}$ est continue sur $[1,+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.

On sait par équivalent usuel :

$$e^{\frac{1}{t}} - 1 \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}.$$

D'où :

$$\frac{\frac{1}{t}}{e^{\frac{1}{t}} - 1} \underset{t\to+\infty}{\sim} 1.$$

Les fonctions $t \mapsto \frac{\frac{1}{t}}{e^{\frac{1}{t}} - 1}$ et $t \mapsto 1$ sont continues, positives sur $[1, +\infty[$. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{\frac{1}{t}} dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} 1 dt$ sont de même nature. Comme cette dernière est une intégrale divergente, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\frac{1}{t}}{e^{\frac{1}{t}} - 1} dt$ diverge aussi.

5. La fonction $t \mapsto \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}}$ est continue sur $[0, +\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$. De plus, on vérifie à l'aide de la caractérisation que l'on a :

$$\sqrt{\frac{t}{2t^2+1}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2t}}.$$

Les fonctions $t \mapsto \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2t}}$ sont continues, positives sur $[c, +\infty[$ pour tout $c > 0$. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que et $\displaystyle\int_c^{+\infty} \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}} dt$ et $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2t}} dt$ sont de même nature. Comme cette dernière est une intégrale divergente, $\displaystyle\int_c^{+\infty} \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}} dt$ diverge aussi pour tout $c > 0$. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{t}{2t^2+1}} dt$ diverge.

6. La fonction $t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $[1, +\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$. De plus par équivalent usuel, on a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$

Les fonctions $t \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont continues, positives sur $[1, +\infty[$. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions continues positives, on en déduit que et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ sont de même nature. Comme cette dernière est une intégrale convergente, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$ converge aussi.

Correction de l'exercice 8. Soit $a > 0$.

1. **Intégrales de Riemann**.

Au niveau du contexte général, l'intégrande $t \mapsto \dfrac{1}{t^a}$ est continue sur $]0, +\infty[$, considérer la nature (et la valeur éventuelle) des intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^a}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^a}$ a donc un sens.

(a) Concernant $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^a}$ qui a une singularité en 0, soit $\epsilon > 0$ un nombre réel destiné à tendre vers 0^+.

— Si $a \neq 1$, on a

$$\int_\epsilon^1 \frac{dt}{t^a} = \left[\frac{1}{1-a} t^{-a+1}\right]_\epsilon^1 = \frac{1}{1-a}\left(\epsilon^{1-a} - 1\right)$$

Deux cas se distinguent alors

— Si $a > 1$ alors $1 - a < 0$ et

$$\int_\epsilon^1 \frac{dt}{t^a} \xrightarrow[\epsilon \to 0^+]{} +\infty$$

L'intégrale généralisée est divergente vers $+\infty$.

— Si $a < 1$ alors $1 - a > 0$ et

$$\int_\epsilon^1 \frac{dt}{t^a} \xrightarrow[\epsilon \to 0^+]{} \frac{1}{1-a}$$

L'intégrale généralisée est convergente vers $\dfrac{1}{1-a}$.

— Si $a = 1$, on a

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^1 \frac{dt}{t} &= [\ln t]_\epsilon^1 = -\ln \epsilon \\ &\xrightarrow[\epsilon \to 0^+]{} +\infty\end{aligned}$$

L'intégrale généralisée est divergente vers $+\infty$.

(b) Concernant $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a}$ qui a une singularité en $+\infty$, soit $T > 0$ un nombre réel destiné à tendre vers $+\infty$.

— Si $a \neq 1$, on a

$$\int_1^T \frac{dt}{t^a} = \left[\frac{1}{1-a} t^{-a+1}\right]_1^T = \frac{1}{1-a}\left(T^{1-a} - 1\right)$$

Deux cas se distinguent alors

— Si $a > 1$ alors $1 - a < 0$ et

$$\int_1^T \frac{dt}{t^a} \xrightarrow[T \to +\infty]{} \frac{1}{a-1}$$

L'intégrale généralisée est convergente vers $\dfrac{1}{a-1}$.

— Si $a < 1$ alors $1 - a > 0$ et

$$\int_1^T \frac{dt}{t^a} \xrightarrow[T \to +\infty]{} +\infty$$

L'intégrale généralisée est divergente vers $+\infty$.

— Si $a = 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_1^T \frac{dt}{t} &= [\ln t]_1^T = \ln T \\ &\xrightarrow[T \to +\infty]{} +\infty \end{aligned}$$

L'intégrale généralisée est divergente vers $+\infty$.

Concernant $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^a}$, la synthèse des cas précédents montre qu'elle divergente dans tous les cas. On peut faire cette synthèse sous forme de tableau

a	0		1		$+\infty$
$\int_0^1 \frac{dt}{t^a}$	$\|\|$	$\frac{1}{1-a}$	DV	DV	
$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a}$	$\|\|$	DV	DV	$\frac{1}{a-1}$	
$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^a}$	$\|\|$	DV	DV	DV	

2. **Intégrales de Bertrand**.

Pour $a > 0$, $b > 0$ fixés, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^a |\ln t|^b}$ est continue sur chacun des intervalles $\left]0, \frac{1}{2}\right]$, $[2, +\infty[$, $]1, 2]$, $]1, +\infty[$, les intégrales généralisées dont il est question dans la suite ont toutes un sens avec des singularités précisées dans chacun des cas. Remarquons aussi que cette intégrande est positive.

(a) Cette intégrale généralisée a une singularité en 0. En effectuant le changement de variable généralisé $u = -\ln t$, $du = -\frac{1}{t}\, dt$, $\mathcal{C}^1$ strictement décroissant de $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ sur $[\ln 2, +\infty[$, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t|\ln t|^a}$ en question est de même nature que

$$\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{u^a}\, du$$

et, d'après la question sur les intégrales de Riemann, on a

— Si $a \leq 1$: Divergence

— Si $a > 1$: Convergence et vaut $\frac{1}{a-1}(\ln 2)^{1-a}$.

(b) De façon analogue au cas précédent, cette intégrale généralisée a une singularité en $+\infty$. En effectuant le changement de variable généralisé $u = \ln t$, $du = \frac{1}{t}\, dt$,

$\mathcal{C}^1$ strictement croissant de $[2, +\infty[$ sur $[\ln 2, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t|\ln t|^a}$ en question est de même nature que

$$\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{1}{u^a}\, du$$

et, d'après la question sur les intégrales de Riemann, on a

— Si $a \leq 1$: Divergence

— Si $a > 1$: Convergence et vaut $\dfrac{1}{a-1}(\ln 2)^{1-a}$.

(c) Cette intégrale généralisée a une singularité en 1. Par le changement de variable affine $t = 1 + u$, elle est de même nature (détailler ?) que l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+u)\ln(1+u)^a}\, du$$

qui a une singularité en 0.
Comme $\ln(1+u) \sim_0 u$, $1 + u \sim_0 1$,

$$\frac{1}{(1+u)\ln(1+u)^a} \sim_0 u^{-a}$$

et, en rédigeant l'argument de l'équivalent proprement on montre alors, toujours en se basant sur le critère de convergence des intégrales de Riemann, que

— Si $a < 1$: Convergence

— Si $a \geq 1$: Divergence

(d) L'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t|\ln t|^a}$$

a deux singularités, l'une en 0, l'autre en $+\infty$. Les question précédentes montrent que quelques soit la valeur de $a > 0$, l'une des deux intégrales généralisées $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t|\ln t|^a}$ ou $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t|\ln t|^a}$ diverge. Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t|\ln t|^a}$ est divergente, quelque soit la valeur de $a > 0$.

(e) — Pour le cas de $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^a|\ln t|^b}$ qui a une singularité en 0.

— Si $a > 1$, prenons $1 < a' < a$. On a

$$\frac{1}{t^a|\ln t|^b}.t^{a'} = \frac{t^{a'-a}}{|\ln t|^b} \xrightarrow[t\to 0^+]{} +\infty.$$

Il existe donc un nombre réel $\dfrac{1}{2} > \delta > 0$ tel que

$$\forall t \in]0, \delta], \ \frac{1}{t^a|\ln t|^b}.t^{a'} \geq 1$$

et donc

$$\forall t \in]0, \delta], \ \frac{1}{t^a|\ln t|^b} \geq t^{-a'} > 0$$

Comme $\int_0^{\delta} t^{-a'}\,dt$ diverge (question 1 car $a'>1$) alors, par le théorème de comparaison, $\int_0^{\delta}\frac{1}{t^a|\ln t|^b}$ diverge et, par Chasles, $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t^a|\ln t|^b}$ diverge.

— Si $a<1$, prenons $1>a'>a$. On a

$$\frac{1}{t^a|\ln t|^b}.t^{a'}=\frac{t^{a'-a}}{|\ln t|^b}\xrightarrow[t\to 0^+]{}0$$

Il existe donc un nombre réel $\frac{1}{2}>\delta>0$ tel que

$$\forall t\in]0,\delta],\ 0<\frac{1}{t^a|\ln t|^b}.t^{a'}\leq 1$$

et donc

$$\forall t\in]0,\delta],\ 0<\frac{1}{t^a|\ln t|^b}\leq t^{-a'}>0$$

Comme $\int_0^{\delta} t^{-a'}\,dt$ converge (question 1, car $a'<1$) alors, par le théorème de comparaison, $\int_0^{\delta}\frac{1}{t^a|\ln t|^b}$ converge et, par Chasles, $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t^a|\ln t|^b}$ converge.

— Concernant l'intégrale généralisée $\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t^a|\ln t|^b}$, les mêmes méthodes (comparaison asymptotique lorsque $t\to+\infty$ conduisent à la conclusion
  — Si $a>1$, l'intégrale converge.
  — Si $a<1$, l'intégrale diverge.

— On peut remarquer que dans chaque cas, la discussion ne porte pas sur la valeur de b

2 Autre

Correction de l'exercice 9. On considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos(tx)}{t^2}\,dt.$$

1. Pour montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, il s'agit de montrer que, pour $x\in\mathbb{R}$ quelconque, l'intégrale généralisée dans la formule définissant $f(x)$ est convergente. Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé.
   — Si $x=0$, l'intégrande vaut 0, $f(0)=0$.
   — On suppose $x\neq 0$. L'intégrande $t\mapsto\frac{1-\cos(tx)}{t^2}$, est clairement continue sur $]0,+\infty[$, le problème de la nature de l'intégrale généralisée a donc un sens, elle a deux singularités, l'une en 0 et l'autre en $+\infty$.

— En 0, on a, lorsque $t \to 0^+$:

$$\frac{1-\cos(tx)}{t^2} \sim \frac{1}{2}(xt)^2\frac{1}{t^2} = \frac{1}{2}x^2.$$

L'intégrande se prolonge par continuité en 0 et l'intégrale $\int_0^1 ..$ est une intégrale faussement généralisée.

— En $+\infty$, on a

$$\forall t \geq 1,\ 0 \leq \left|\frac{1-\cos(tx)}{t^2}\right| \leq \frac{2}{t^2}$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{2}{t^2}\, dt$ est convergente (refaire le calcul), donc, par comparaison, $\int_1^{+\infty} \left|\frac{1-\cos(tx)}{t^2}\right|\, dt$ converge et donc, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2}\, dt$ est *absolument* convergente et donc convergente.

— Les deux intégrales $\int_0^1 ...$ et $\int_1^{+\infty} ...$ sont convergente et par définition, l'intégrale $\int_0^{+\infty} ...$ est convergente.

2. Il est claire que $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0. Soit $x \in \mathbb{R}$, comme, par parité de cos,

$$\forall t > 0,\ \frac{1-\cos(t(-x))}{t^2} = \frac{1-\cos(tx)}{t^2}$$

il vient, après intégration, $f(x) = f(-x)$.
La fonction f est donc paire.

3. Supposons que $x > 0$, en effectuant le changement de variable affine $u = t.x$, monotone de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$, $(du = x.dt)$, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{(u/x)^2}\, \frac{1}{x}.dt = x.\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(u)}{u^2}\, du = x.f(1)$$

Comme f est paire et $f(0) = 0$, on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(1).|x|$$

NB : Montrer que $f(1) = \pi/2$ demande beaucoup de travail.

Correction de l'exercice 10.

1. L'intégrale généralisée est impropre en $+\infty$. Soit $A \in [0,+\infty[$.

$$\int_0^A \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^A \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}.$$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est convergente et vaut $\frac{\pi}{2}$.

2. On a pour tout $t \in [0,+\infty[$:

$$0 \leq \frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

Par comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on déduit de la question précédente que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ converge aussi.

3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\ dt}{(1+t^2)^{n+1}}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
   $$\begin{aligned} J_n + I_{n+1} &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} + \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{(1+t^2)^{n+1}})dt \\ &= I_n. \end{aligned}$$
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in [0, +\infty[$. Les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \dfrac{1}{2}\dfrac{-1}{n(1+t^2)^n}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$ donc par IPP :
   $$\begin{aligned} \int_0^A \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} &= \int_0^A u(t)v'(t)dt \\ &= [u(t)v(t)]_0^A - \int_0^A u'(t)v(t)dt \\ &= \frac{-A}{2n(1+A^2)^n} - \int_0^A \frac{-1}{2n(1+t^2)^n}dt \\ &= \frac{-A}{2n(1+A^2)^n} + \frac{1}{2n}\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n}dt. \end{aligned}$$
   En faisant tendre A vers $+\infty$ on obtient :
   $$J_n = \frac{1}{2n} I_n.$$
   (c) D'après les deux questions précédentes :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2n} I_n + I_{n+1} = I_n$$
   i.e.
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n.$$
   Par récurrence, on obtient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\begin{aligned} I_n = \frac{(2(n-1)-1)(2(n-2)-1)\cdots 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 2} I_1 &= \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)\cdots 1}{(2^{n-1}(n-1)!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2}\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 11.

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est prolongeable par continuité en 0 par 1 donc il s'agit d'une fausse impropreté.
   Donc l'intégrale converge.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction H_n est une somme (finie) de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   Par ailleurs :
$$H_n(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(0)}{k} = 0.$$

3. Le code :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def H(n,x):
        s =0
        for k in range(1,n+1):
                s = s + np.sin(k*x)/k
        return s

X=np.linspace(0,10,100)
for n in [2,10,15,20]:
    plt.plot(X,H(n,X))
plt.show()
```

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En notant f la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ prolongée en 0, continue sur $[0,1]$, on a :
$$H_n\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{k}{n}\right)}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$
   On reconnaît une somme de Riemann dont on sait qu'elle tend vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt$.
   Cette limite est strictement positive car l'intégrande est strictement positif.

Correction de l'exercice 12.

1. Soit $x > 0$. la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x,+\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$. Par croissance comparée, on sait que :
$$\lim_{t\to+\infty} t^2 \times \frac{e^{-t}}{t} = \lim_{t\to+\infty} te^{-t} = 0.$$
   Ainsi : $\dfrac{e^{-t}}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
   De plus, les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ sont continues et positives sur $[x,+\infty[$. D'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge alors $J(x)$ converge aussi.
2. (a) Soit $A \in [x,+\infty[$. On a :
$$\forall t \in [x,+\infty[, \quad \frac{e^{-t}}{t^2} \leq e^{-t} \times \frac{1}{x^2}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_x^A \frac{e^{-t}}{t^2}dt &\leq \frac{1}{x^2}\int_x^A e^{-t}dt\\ &\leq \frac{1}{x^2}(e^{-x}-e^{-A})\\ &\leq \frac{1}{x^2}e^{-x}.\end{aligned}$$

En particulier, la fonction $A \mapsto \displaystyle\int_x^A \frac{e^{-t}}{t^2}dt$ est croissante et majorée donc possède une limite en $+\infty$. On en déduit donc que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt$ converge et vérifie :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt \leq \frac{1}{x^2}e^{-x}.$$

On en déduit l'encadrement :

$$0 \leq \frac{\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt}{\frac{e^{-x}}{x}} \leq \frac{1}{x}.$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt}{\frac{e^{-x}}{x}} = 0.$$

Cela signifie : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$.

(b) Soient $x > 0$ et $A > x$. Les fonctions $u : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe C^1 sur $[x, A]$. Par intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_x^A \frac{e^{-t}}{t}dt &= \int_x^A u(t)v'(t)dt\\ &= [u(t)v(t)]_x^A - \int_x^A u'(t)v(t)dt\\ &= -\frac{e^{-A}}{A} + \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^A \frac{e^{-t}}{t^2}dt.\end{aligned}$$

En faisant tendre A vers $+\infty$ et avec la question précédente on obtient donc :

$$J(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2}dt = \frac{e^{-x}}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{e^{-x}}{x}\right).$$

D'après la caractérisation de la relation d'équivalence, on a bien :

$$J(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.$$

Correction de l'exercice 13. Soit $I_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin x.e^{-x}\ dx$.

On se ramène à l'intervalle $[0,\pi]$ par « translation » en posant $t = x - n\pi$ (changement de variables affine), pour obtenir

$$I_n = \int_0^\pi \sin(t+n\pi)e^{-(t+n\pi)}\ dt = (-1)^n e^{-n\pi}\int_0^\pi \sin(t)e^{-t}\ dt = (-1)^n e^{-n.pi} I_0$$

La suite (I_n) est donc une suite géométrique de raison $-e^{-\pi}$.

Concernant la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x.e^{-x}\ dx$:

— Son intégrande $x \mapsto \sin x.e^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$

— $\forall x \geq 0$, $0 \leq |\sin(x)e^{-x}| \leq e^{-x}$,

— Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx = 1$ (calcul explicite), on en déduit par le théorème de comparaison que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x)e^{-x}\ dx$ est absolument convergente et donc convergente.

Si N est un entier (tendant vers $+\infty$), on a, par Chasles,

$$\sum_{n=0}^{N} I_n = \int_0^{(N+1)\pi} \sin(x)e^{-x}\ dx \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \sin(x)e^{-x}\ dx.$$

Or pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} I_n = I_0.\frac{1-(-e^{-\pi})^n}{1+e^{-\pi}} \quad \text{(somme géométrique)}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{N} I_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} I_0.\frac{1}{1+e^{-\pi}}.$$

Par unicité de la limite, on a donc

$$\int_0^{+\infty} \sin(x)e^{-x}\ dx = I_0.\frac{1}{1+e^{-\pi}}$$

Cette formule donne le lien entre les deux parties de l'exercice.

Concernant la valeur cette intégrale, on peut primitiver $x \mapsto \sin(x)e^{-x}$ en constatant qu'il s'agit de la partie imaginaire de $x \mapsto e^{(-1+i)x}$ dont une primitive est $x \mapsto \dfrac{1}{-1+i}e^{(-1+i)x} = -\dfrac{1}{2}(1+i)e^{(-1+i)x}$. Comme

$$\mathrm{Im}\left(-\frac{1}{2}(1+i)e^{(-1+i)x}\right) = -\frac{1}{2}(e^{-x}\cos(x) + e^{-x}\sin(x)),$$

on a alors

$$I_0 \int_0^{+\infty} \sin(x)e^{-x}\ dx = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}(e^{-x}\cos(x)+e^{-x}\sin(x)\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

On peut aussi (calcul classique, sans utiliser les nombres complexes) effectuer deux intégrations par parties successives