Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – Révisions 1

INTÉGRALES

1 Calculs de primitives et d'intégrales

Exercice 1. Préciser l'ensemble de définition et déterminer les primitives des fonctions définies par :

1. $f_1(x) = \tan^2 x$,
2. $f_2(x) = \tan x$,
3. $f_3(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$,
4. $f_4(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$,
5. $f_5(x) = |x^2 - 1|$,
6. $f_6(x) = \dfrac{1}{(x-5)^3}$,
7. $f_7(x) = \ln(4-x)$,
8. $f_8(x) = |x|^{2/5}$.

Exercice 2. Préciser les intervalles sur lesquels les fonctions suivantes sont continues, puis en déterminer toutes les primitives sur chacun de ces intervalles.

1. $f\,(t) = \dfrac{1}{t\,(\ln t)^3}$,
2. $h\,(x) = \cos^3 x$,

Exercice 3. Déterminer A et B dans l'égalité suivante :

$$\frac{x}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2-x-2}dx$.

Exercice 4. Calculer ces intégrales par intégration par parties.

1. $\displaystyle\int_0^2 te^{2t}dt$,
2. $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{y}\ln(y)dy$,
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2r+1}}dr$,
4. $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{3x+1}dx$.

Exercice 5. Calculer à l'aide d'une intégration par parties les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (x\cos x + \sin x).\ln x\ dx,\ I_2 = \int_1^{e^{\pi/2}} \cos(\ln x)\ dx,\ I_3 = \int_1^e (\ln x)^3\ dx.$$

Exercice 6. Justifier la bonne définition de chacune des intégrales suivantes, puis trouver leur valeur à l'aide du changement de variable indiqué :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^2 x\sqrt{x+1}dx$ avec $u = x+1$,
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos^3 x dx$ avec $u = \cos^2 x$,
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx$ avec $u = \cos x$,
4. $I_4 = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$ avec $x = u^2 - 1$.

2 Sommes de Riemann

Exercice 7. En utilisant les sommes de Riemann associées à des fonctions que l'on déterminera, calculer les limites des suites :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n\alpha + i\beta}$ avec α et β deux réels strictement positifs.
2. $I_n = \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + ... + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.
3. $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n\,(n+k)}}$.

Exercice 8. En utilisant les sommes de Riemann associées à des fonctions que l'on déterminera, calculer les limites des suites :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} \prod_{k=1}^{2n} (n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$,
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} (1+\frac{k}{n})\right)^{\frac{1}{n}}$,
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{k.n+n^2}$.

3 Divers

Exercice 9. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt.$$

1. Justifier que f est bien définie et est dérivable sur $]0,+\infty[$. Calculer sa fonction dérivée.
2. En déduire $f(x)$ pour tout $x > 0$.
3. Retrouver ce résultat à l'aide d'un changement de variable.

Exercice 10. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{e^t} dt.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt$.

1. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

3. Monter que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

Exercice 12. Soit F et G les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^1 e^{-(xu)^2} du.$$

1. Montrer à l'aide d'un changement de variables que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = xG(x)$.
2. Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que :

$$\forall x \neq 0, \quad G'(x) = \frac{xf(x) - F(x)}{x^2} \quad \text{où} \quad f(x) = e^{-x^2}.$$

   Est-elle dérivable en 0 ?
3. Déterminer les variations de G.