Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

**Mathématiques – Révisions 2**

**Intégrales**

# 1 Calculs de primitives et d'intégrales

**Correction de l'exercice 1.**

1. $f_1(x) = \tan^2 x$.
   **Domaine de définition/continuité** : c'est celui de la fonction tangente :
   $$D = \cup_{k\in\mathbb{Z}} I_k \quad \text{où} \quad I_k = \left]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi\right[.$$
   **Primitives :** sur chaque intervalle $I_k$, on a $f_1(x) = (\tan^2 x + 1) - 1$ et donc une primitive de $f_1$ sur $I_k$ est $F_{1,k} : x \mapsto \tan x - x$. S'il s'agit d'avoir toutes les primitives on peut ajouter une constante : celle-ci dépend de l'intervalle $I_k$.
2. $f_2(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.
   **Domaine de définition/continuité** : c'est celui de la fonction tangente :
   $$D = \cup_{k\in\mathbb{Z}} I_k \quad \text{où} \quad I_k = \left]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi\right[.$$
   **Primitives :** sur chaque intervalle $I_k$, on a $f_2(x) = \dfrac{d}{dx}(\ln|\cos x|)$ et donc une primitive de $f_2$ sur $I_k$ est $F_{2,k} : x \mapsto \ln|\cos x|$. Noter la valeur absolue, qui gère le problème du signe de cos sur les intervalles $I_k$ avec $k$ impair. S'il s'agit d'avoir toutes les primitives on peut ajouter une constante : celle-ci dépend de l'intervalle $I_k$.
3. $f_3(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$.
   **Domaine de définition/continuité** : $I = ]-\infty, 2[$.
   **Primitives :** sur l'intervalle $I$, on a $f_3(x) = (2-x)^{-\frac{1}{2}}$ et donc une primitive de $f_3$ sur $I$ est $F_3 : x \mapsto -2.(2-x)^{+\frac{1}{2}}$. L'ensemble des primitives à valeurs réelles de $f_3$ sur $I$ est $\{F_3 + C, C \in \mathbb{R}\}$.
4. $f_4(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.
   - Si $c = 0$ : on a une fonction affine $f_4 : x \mapsto \dfrac{a}{d}x + \dfrac{b}{d}$ dont le domaine de déf. est $\mathbb{R}$ et une primitive sur $\mathbb{R}$ est $F_4 : x \mapsto \dfrac{a}{2d}x^2 + \dfrac{b}{d}.x$.
   - Si $c \neq 0$ : on a une fraction rationnelle
     $$f_4 : x \mapsto \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}}$$
     dont le domaine de déf. est $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\} = \left]-\infty, -\dfrac{d}{c}\right[ \cup \left]-\dfrac{d}{c}, +\infty\right[ = I_- \cup I_+$.

Sur chacun de ces deux intervalles $I = I_-$ ou $I = I_+$, on a

$$\forall x \in I,\ f_4(x) = \frac{\frac{a}{c}(x+\frac{d}{c}) + \frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$$

et donc une primitive de $f_4$ sur $I$ est

$$F_4 : x \mapsto \frac{a}{c}x + \frac{bc-ad}{c^2}\ln|x+\frac{d}{c}|$$

Noter là encore l'utilisation de la v.abs. pour gérer le signe du dénominateur sur l'intervalle $I_-$.

5. $f_5(x) = |x^2-1|$.
   **Domaine de définition/continuité :** $\mathbb{R}$.
   **Primitives** : la v.abs. est un obstacle à l'intégration en formules directe. On élimine la v.abs. en donnant une formule par morceaux. On a $\mathbb{R} = I_- \cup I_0 \cup I_+$ avec

$$I_= ]-\infty,-1],\ I_0 = [-1,1],\ I_+ = [1,+\infty[.$$

On a

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \in I_- \\ 1-x^2 & \text{si } x \in I_0 \\ x^2-1 & \text{si } x \in I_+ \end{cases}$$

Si $F_5$ est une primitive de $f_5$ sur tout $\mathbb{R}$ alors

- $F_5$ est continue sur $\mathbb{R}$ et
- il existe 3 constantes réelles $C_-$, $C_0$ et $C_+$ telles que

$$\begin{aligned} \forall x \in I_-,\ F_5(x) &= \frac{1}{3}x^3 - x + C_- \\ \forall x \in I_+,\ F_5(x) &= \frac{1}{3}x^3 - x + C_+ \\ \forall x \in I_0,\ F_5(x) &= x - \frac{1}{3}x^3 + C_0. \end{aligned}$$

La continuité en $-1$ force :

$$C_- + \frac{2}{3} = C_0 - \frac{2}{3},$$

la continuité en $+1$ force

$$C_+ - \frac{2}{3} = C_0 + \frac{2}{3} \quad \text{ie} \quad C_- = C_0 - \frac{4}{3},\ C_+ = C_0 + \frac{4}{3}.$$

Une primitive particulière sur *tout* $\mathbb{R}$ s'obtient en prenant $C_0 = 0$ (choix de constante)

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_5(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x - \frac{4}{3} & \text{si } x \in I_- \\ x - \frac{1}{3}x^3 & \text{si } x \in I_0 \\ \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{4}{3} & \text{si } x \in I_+ \end{cases}$$

6. $f_6(x) = \dfrac{1}{(x-5)^3} = (x-5)^{-3}$.
**Domaine de définition/continuité :** $D = I_- \cup I_+$ avec $I_- = ]-\infty, 5[$ et $I_+ = ]5, +\infty[$.
**Primitives :** sur chacun de ces intervalles, une primitive est donnée par $F_6(x) = -\dfrac{1}{2}.(x-5)^{-2}$. Si on s'autorise à parler de primitive sur tout l'ensemble de définition (ce qui peut-être dangereux lorsqu'on calcule des intégrales), on a alors $F$ est primitive de $f_6$ sur $D$ si et seulement si il existe *deux* constantes $C_-$ et $C_+$ telles que
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{5\},\ F(x) = \begin{cases} F_6(x) + C_- & \text{si } x \in I_- \\ F_6(x) + C_+ & \text{si } x \in I_+ \end{cases}$$

7. $f_7(x) = \ln(4-x)$.
**Domaine de définition/continuité :** $D = ]-\infty 4[$.
**Primitives :** une primitive de $t \mapsto \ln t$ sur $]0, +\infty[$ est $t \mapsto t. \ln t - t$, par composition avec une fonction affine, une primitive de $f_7$ sur l'intervalle $D$ est donnée par
$$\forall x \in D = ]-\infty, 4[,\ F_7(x) = -\left((4-x). \ln(4-x) - (4-x)\right)$$

8. $f_8(x) = |x|^{2/5}$.
**Domaine de définition/continuité :** $\mathbb{R}$.
**Primitives :** cependant la présence de la v.abs. empêche la primitivation en formule directe. On a, en posant $I_- = ]-\infty, 0]$, $I_+ = [0, +\infty[$ :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_8(x) = \begin{cases} x^{\frac{2}{5}} & \text{si } x \in I_+ \\ (-x)^{\frac{2}{5}} & \text{si } x \in I_- \end{cases}$$
et donc $F_8$ est une primitive de $f_8$ sur tout $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe deux constantes $C_-$ et $C_+$ telles que
— $F_8$ est continue sur $\mathbb{R}$
— et
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_8(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{7}x^{\frac{2}{5}+1} + C_+ & \text{si } x \in I_+ \\ -\dfrac{5}{7}(-x)^{\frac{7}{5}} + C_- & \text{si } x \in I_- \end{cases}$$
Ceci équivaut (continuité en 0) à il existe une constante $C$ telle que
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_8(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{7}x^{\frac{2}{5}+1} + C & \text{si } x \in I_+ \\ -\dfrac{5}{7}(-x)^{\frac{7}{5}} + C & \text{si } x \in I_- \end{cases}$$

**Correction de l'exercice 2.**

1. Pour $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln t)^3}$.
$f$ est définie continue sur $I_- = ]0, 1[$ et sur $I_+ = ]1, +\infty[$, elle admet donc une primitive $F_\pm$ sur chaque intervalle $I_\pm$, sur $I_+$, on peut prendre pour $F_+$ la fonction définie par
$$\forall x \in ]1, +\infty[,\ F_+(x) = \int_2^x \frac{1}{t(\ln t)^3}\, dt$$

Notons que la borne 2 a pour seule particularité d'appartenir à $I_+$ et donc l'intégrale à bien un sens.
Soit $x > 1$, calculons plus avant l'intégrale définissant $F_+(x)$.
Effectuons le changement de variable $u = \ln t$, $du = \frac{dt}{t}$. On a alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_2^x \frac{1}{t\,(\ln t)^3}\ dt \\ &= \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{1}{u^3}\ du \\ &= \left[-\frac{1}{4}\frac{1}{u^4}\right]_{\ln 2}^{\ln x} = -\frac{1}{4}\frac{1}{(\ln x)^4} + Cste \end{aligned}$$

On peut oublier la valeur de la constante et prendre pour primitive de $f$ sur $I_+$,

$$F_+(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{(\ln x)^4}$$

Une rapide inspection (dérivation) de la formule précédente montre qu'elle définit aussi une primitive de $f$ sur $I_-$.

2. Pour $h\,(x) = \cos^3 x$.
Il s'agit d'opérer une linéarisation du polynôme en cos. On a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$(\cos x)^3 = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 \overset{\text{Newton}}{=} \frac{1}{8}\left(e^{i3x} + 3e^{+ix} + 3e^{ix} + e^{-i3x}\right) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$$

Par linéarité, une primitive de $h$ sur $\mathbb{R}$ est définie par la formule

$$H(x) = \frac{1}{12}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)$$

**Correction de l'exercice 3.** Pour $A$, $B \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} &= \frac{A(x-2) + B(x+1)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{(A+B)x - 2A + B}{x^2 - x - 2} \end{aligned}$$

et donc pour que

$$\frac{x}{x^2 - x - 2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

il suffit que $A + B = 1$ et $B - 2A = 0$, $i.e$ $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{2}{3}$.
On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{x^2 - x - 2} dx &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1}\ dx + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{x-2}\ dx \\ &= \frac{1}{3}\left[\ln(x+1)\right]_0^1 + \frac{2}{3}\left[\ln|x-2|\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{2}{3}\ln 2 = -\frac{1}{3}\ln 2 \end{aligned}$$

Remarque : On doit trouver un résultat négatif car l'intégrande est négative sur l'intervalle d'intégration. Il faut faire attention à la présence possible de la valeur absolue lors de la primitivation en ln.

**Correction de l'exercice 4.** Toutes les fonctions considérées sont continues sur le segment d'intégration donc les intégrales sont bien définies .

1. Les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto \dfrac{e^{2t}}{2}$ sont de classe $C^1$ sur $[0, 2]$. Par intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^2 te^{2t}dt = \int_0^2 u(t)v'(t)dt &= [u(t)v(t)]_0^2 - \int_0^2 u'(t)v(t)dt \\ &= \left[\frac{te^{2t}}{2}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{e^{2t}}{2}dt \\ &= e^4 - \frac{e^4}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{3e^4+1}{4}.\end{aligned}$$

2. Les fonctions $u : y \mapsto \ln(y)$ et $v : y \mapsto \dfrac{y^{3/2}}{3/2}$ sont de classe $C^1$ sur $[1, 5]$. Par intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_1^5 \sqrt{y}\ln(y)dy = \int_1^5 u(y)v'(y)dy &= [u(y)v(y)]_1^5 - \int_1^5 u'(y)v(y)dy \\ &= \left[\frac{y^{3/2}\ln(y)}{3/2}\right]_1^5 - \int_1^5 \frac{y^{3/2}}{3/2} \times \frac{1}{y}dy \\ &= \frac{10\sqrt{5}}{3}\ln(5) - \frac{2}{3}\int_1^5 \sqrt{y}dy \\ &= \frac{10\sqrt{5}}{3}\ln(5) - \frac{2}{3}\left[\frac{y^{3/2}}{3/2}\right]_1^5 \\ &= \frac{10\sqrt{5}}{3}\ln(5) - \frac{20\sqrt{5}}{9} + \frac{4}{9}.\end{aligned}$$

3. Les fonctions $u : r \mapsto r$ et $v : r \mapsto \sqrt{2r+1}$ sont de classe $C^1$ sur $[0, 1]$. Par intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2r+1}}dr = \int_0^1 u(r)v'(r)dr &= [u(r)v(r)]_0^1 - \int_0^1 u'(r)v(r)dr \\ &= \left[r\sqrt{2r+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \sqrt{2r+1}dr \\ &= \sqrt{3} - \frac{1}{2}\left[\frac{(2r+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \sqrt{3} - \frac{1}{3}\left(3^{\frac{3}{2}} - 1\right) \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

4. Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto \dfrac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}$ sont de classe $C^1$ sur $[0, 2]$. Par

intégration par parties, on a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^2 x\sqrt{3x+1}dx = \int_0^2 u(x)v'(x)dx &= [u(x)v(x)]_0^2 - \int_0^x u'(x)v(x)dx \\ &= \left[\frac{2}{9}x(3x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}}dx \\ &= \frac{28\sqrt{7}}{9} - \frac{2}{27}\left[\frac{(3x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_0^2 \\ &= \frac{224\sqrt{7}+4}{135}.\end{aligned}$$

**Correction de l'exercice 5.**

— $I_1 = \displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi/3} (x\cos x + \sin x)\ln x dx.$

Posons $u(x) = \ln x$, $v(x) = x\sin x$. Les fonctions $u$ et $v$ ainsi définies sont $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle d'intégration $J = [\pi/2, 2\pi/3]$ et on a

$$\forall x \in J,\ u'(x) = \frac{1}{x},\ v'(x) = x\cos x + \sin x$$

et donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\pi/2}^{2\pi/3} v'(x).u(x)\ dx = [u(x).v(x)]_{\pi/2}^{2\pi/3} - \int_{\pi/2}^{2\pi/3} v(x).u'(x)\ dx \\ &= [\ln x.x.\sin x]_{\pi/2}^{2\pi/3} - \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \sin x\ dx \\ &= [\ln x.x.\sin x]_{\pi/2}^{2\pi/3} + [\cos x]_{\pi/2}^{2\pi/3} \\ &= .... \end{aligned}$$

— $I_2 = \displaystyle\int_1^{e^{\pi/2}} \cos(\ln x)dx$ Posons $u(x) = \cos\ln x$, $v(x) = x$. Les fonctions $u$ et $v$ ainsi définies sont $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle d'intégration $J = [1, e^{\pi/2}]$ et on a

$$\forall x \in J,\ u'(x) = -\frac{1}{x}.\sin\ln x,\ v'(x) = 1$$

et donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^{e^{\pi/2}} v'(x).u(x)\ dx = [u(x).v(x)]_1^{e^{\pi/2}} - \int_1^{e^{\pi/2}} v(x).u'(x)\ dx \\ &= [x.\cos\ln x]_1^{e^{\pi/2}} - \int_1^{e^{\pi/2}} 1.\sin\ln x\ dx \end{aligned}$$

Sur cette dernière intégrale, on effectue une i.p.p. dans le même esprit pour obtenir

$$\int_1^{e^{\pi/2}} \underbrace{1}_{v'(x)}.\underbrace{\sin\ln x}_{u(x)}\ dx = [x.\sin\ln x]_1^{e^{\pi/2}} + \int_1^{e^{\pi/2}} 1.\cos\ln x\ dx$$

En résumant, il vient

$$I_2 = [x.\cos\ln x]_1^{e^{\pi/2}} - [x.\sin\ln x]_1^{e^{\pi/2}} - I_2$$

et donc

$$I_2 = \frac{1}{2}\left([x.\cos\ln x]_1^{e^{\pi/2}} - [x.\sin\ln x]_1^{e^{\pi/2}}\right) = ....$$

— $I_3 = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^3 dx$. Posons $u(x) = (\ln x)^3$, $v(x) = x$. Les fonctions $u$ et $v$ ainsi définies sont $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle d'intégration $J = [1, e]$ et on a

$$\forall x \in J,\ u'(x) = \frac{3}{x}.(\ln x)^2,\ v'(x) = 1$$

et donc, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_1^e v'(x).u(x)\ dx = [u(x).v(x)]_1^e - \int_1^e v(x).u'(x)\ dx \\ &= \left[x.(\ln x)^3\right]_1^e - \int_1^e 3.(\ln x)^2\ dx \\ &= e - 3.\int_1^e (\ln x)^2\ dx \end{aligned}$$

On recommence dans le même esprit avec $u(x) = (\ln x)^2$ et $v(x) = x$ pour obtenir

$$\int_1^e \underbrace{1}_{v'(x)}.\underbrace{(\ln x)^2}_{u(x)}\ dx \quad = \quad e - 2.\int_1^e (\ln x)\ dx$$

et encore une fois, avec $u(x) = (\ln x)$ et $v(x) = x$ pour obtenir

$$\int_1^e \underbrace{1}_{v'(x)}.\underbrace{(\ln x)}_{u(x)}\ dx \quad = \quad e - \int_1^e 1\ dx = 1$$

En résumant

$$I_3 = e - 3.(e-2) = 6 - 2e$$

**Correction de l'exercice 6.** 1. La fonction $u : x \mapsto x + 1$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2]$ et pour tout $x \in [0, 2]$ : $u'(x) = 1$.
Par changement de variable, on a donc :

$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^2 x\sqrt{x+1}dx &= \int_0^2 (u(x)-1)\sqrt{u(x)}u'(x)dx \\ &= \int_1^3 (u-1)\sqrt{u}du \\ &= \left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^3 \\ &= \frac{18\sqrt{3}-2}{5} - \frac{6\sqrt{3}-2}{3} \\ &= \frac{24\sqrt{3}+4}{15} \end{aligned}$$

2. La fonction $u : x \mapsto \cos^2(x)$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ et pour tout $x \in [0, \pi/2]$ : $u'(x) = -2\sin(x)\cos(x)$.
Par changement de variable, on a donc :

$$\begin{aligned} I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^3 x dx &= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(x)u(x)u'(x)dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-u(x)}u(x)u'(x)dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_1^0 u\sqrt{1-u}du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 u\sqrt{1-u}du. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $t = 1 - u$ on obtient :

$$\begin{aligned} I_2 = -\frac{1}{2}\int_1^0 (1-t)\sqrt{t}dt &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)\sqrt{t}dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \\ &= \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

3. La fonction $u : x \mapsto \cos(x)$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/3]$ et pour tout $x \in [0, \pi/3]$ : $u'(x) = -\sin(x)$.
Par changement de variable, on a donc :

$$\begin{aligned} I_3 = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}dx &= \int_0^{\pi/3} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1+\cos(x)}dx \\ &= -2\int_0^{\pi/3} \frac{2u'(x)u(x)}{1+u(x)}dx \\ &= -2\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{u}{1+u}du \\ &= 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1+u-1}{1+u}du \\ &= 2\left[u - \ln(1+u)\right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= 1 - 4\ln(2) + 2\ln(3) \end{aligned}$$

4. Sur $[0, \sqrt{2}]$, la fonction $u \mapsto u^2 - 1$ a pour bijection réciproque $u : x \in [-1, 1] \mapsto$

$\sqrt{x+1}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $u' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
I_4 = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}} &= \int_{-1}^{1} \frac{2u(x)u'(x)dx}{1+u(x)} \\
&= 2\int_0^{\sqrt{2}} \frac{u}{1+u} du \\
&= 2\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1+u-1}{1+u} du \\
&= 2\left[u - \ln(1+u)\right]_0^{\sqrt{2}} \\
&= 2\sqrt{2} - 2\ln(1+\sqrt{2})
\end{aligned}$$

## 2 Sommes de Riemann

**Correction de l'exercice 7.** 1. On a :

$$\begin{aligned}
S_n := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha n + \beta i} &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha + \beta \frac{i}{n}} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

en ayant posé $f(x) = \dfrac{1}{\alpha + \beta x}$. La fonction $f$ ainsi définie est continue sur $[0,1]$ et donc, par le théorème des sommes de Riemann, on a

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 \frac{1}{\alpha+\beta x}\ dx = \left[\frac{1}{\beta}\ln(|\alpha+\beta x|)\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\ln\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right)}{\beta}.$$

2. On a :

$$I_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

en ayant posé $f(x) = \sqrt{x}$. La fonction $f$ ainsi définie est continue sur $[0,1]$ et donc, par le théorème des sommes de Riemann, on a

$$I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 \sqrt{x}\ dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}.$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
U_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n(n+k)}} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

en ayant posé $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$. La fonction $f$ ainsi définie est continue sur $[0,1]$ et donc, par le théorème des sommes de Riemann, on a

$$U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx = \left[2\sqrt{1+x}\right]_{x=0}^{x=1} = 2(\sqrt{2}-1).$$

**Correction de l'exercice 8.**

1. En passant au logarithme :

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1}{n^4}\prod_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln(n^2+k^2) - 4\ln(n) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}(\ln(n^2+k^2) - 2\ln(n)) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln\left(\frac{n^2+k^2}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\ln\left(\frac{n^2+k^2}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{2n}\right)
\end{aligned}$$

où $f$ est la fonction définie par : $f(x) = \ln(1+4x^2)$. Cette fonction étant continue sur $[0,1]$, par le théorème des sommes de Riemann on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+4x^2)dx.$$

En effectuant une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(1+4x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \ln(1+y^2)dy &= \frac{1}{2}\left[y\ln(1+y^2)\right]_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 y\times\frac{2y}{y^2+1}dx \\
&= \ln(5) - \int_0^2 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx \\
&= \ln(5) - [x-\arctan(x)]_0^2 \\
&= \ln(5) - 2 + \arctan(2).
\end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} f\left(\frac{k}{n}\right) = 2\int_0^1 \ln(1+4x^2)dx = 2\ln(5) - 4 + 2\arctan(2).$$

Enfin par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^4}\prod_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}} = 25e^{2\arctan(2)-4}.$$

2. En passant au logarithme :

$$\begin{aligned}\ln\left(\left(\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\right)^{\frac{1}{n}}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

où $f$ est la fonction définie par : $f(x) = \ln(1+x)$. Cette fonction étant continue sur $[0,1]$, par le théorème des sommes de Riemann on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+x)dx.$$

En effectuant une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+x)dx &= [x\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 x\times\frac{1}{1+x}dx\\ &= \ln(2) - \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}dx\\ &= \ln(2) - [x-\ln(1+x)]_0^1\\ &= 2\ln(2)-1.\end{aligned}$$

Enfin par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\right)^{\frac{1}{n}} = 4e^{-1}.$$

$\lim_{n\to+\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}(1+\frac{k}{n})\right)^{\frac{1}{n}}$,

3. On effectue le changement d'indice $i = k-n$ :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k}{k.n+n^2} &= \sum_{i=1}^{n}\frac{i+n}{(i+n)n+n^2}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}+1}{2+\frac{i}{n}}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\end{aligned}$$

où $f$ est la fonction $x\mapsto\dfrac{1+x}{2+x}$. Comme cette fonction est continue sur $[0,1]$, par le théorème des sommes de Riemann on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{k}{k.n+n^2} = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1\frac{1+x}{2+x}dx.$$

Enfin :

$$\int_0^1 \frac{1+x}{2+x}dx = \int_0^1 \frac{2+x-1}{2+x}dx = 1 - \int_0^1 \frac{1}{2+x}dx$$
$$= 1 - \ln(2+x)$$
$$= 1 - \ln(3) + \ln(2).$$

## 3 Divers

**Correction de l'exercice 9.**

1. La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$ donc possède une primitive $F$ sur cet intervalle. En particulier, $f$ est bien définie et :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right).$$

En tant que primitive d'une fonction continue, $F$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. La fonction inverse est dérivable sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$. Ainsi par composition, $x \mapsto F\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ puis par somme $f$ l'est. De plus :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = F'(x) + \frac{1}{x^2}F'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(x)}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \times \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0.$$

2. La fonction $f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ de dérivée nulle. Donc $f$ est constante sur $]0,+\infty[$. En particulier :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = f(1) = 0.$$

3. Soit $x \in ]0,+\infty[$. On effectue le changement de variables $y = \dfrac{1}{t}$ : soit $y : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ de classe $C^1$ sur $[x, \dfrac{1}{x}]$. Alors

$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt = \int_{\frac{1}{x}}^{x} -\frac{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2\left(1+\left(\frac{1}{t}\right)^2\right)}dt = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(y(t))}{1+y(t)^2}y'(t)dt$$
$$= \int_{x}^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(y)}{1+y^2}dy$$
$$= -\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(y)}{1+y^2}dy$$
$$= -f(x).$$

Donc, $f(x) = -f(x)$ donc $f(x) = 0$.
Ainsi : $\forall x > 0,\ f(x) = 0$.

**Correction de l'exercice 10.** La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(1+t^2)}{e^t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc possède une primitive $F$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$f(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{e^t} dt = F(x^2) - F(-\sqrt{x}).$$

- La fonction $F$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ en tant que primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
- Comme $x \mapsto x^2$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, la composée $x \mapsto F(x^2)$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la composée $x \mapsto F(-\sqrt{x})$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Finalement, $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que combinaison linéaire de fonctions de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$f'(x) = 2xF'(x^2) - \frac{-1}{2\sqrt{x}}F'(-\sqrt{x}) = \frac{2x\ln(1+x^4)}{e^{x^2}} + \frac{\ln(1+x)}{2\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}}.$$

**Correction de l'exercice 11.**

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{t^n}{1+t^2}$ est continue sur $[0,1]$ donc l'intégrale $I_n$ est bien définie.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in [0,1]$, alors $1+t^2 \geq 1$ donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$ on a :
$$0 \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1.$$
En multipliant membre à membre par $t^n \geq 0$ on obtient :
$$0 \leq \frac{t^n}{1+t^2} \leq t^n.$$
Les bornes étant dans l'ordre croissant, par croissance de l'intégrale on trouve :
$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}.$$
3. Par le théorème d'encadrement, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

**Correction de l'exercice 12.** Soit $F$ et $G$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^1 e^{-(xu)^2} du.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On effectue le changement de variable : $t : u \mapsto xu$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ :
$$G(x) = \frac{1}{x}\int_0^1 e^{-(t(u))^2} t'(u) du = \frac{1}{x}\int_{t(0)}^{t(1)} e^{-t^2} dt = \frac{F(x)}{x}.$$
L'égalité est également bien vérifiée pour $x = 0$ puisque $F(0) = 0$.

2. La fonction $F$ est une primitive de la fonction $f$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après la question 1, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a :

$$G(x) = \frac{F(x)}{x}.$$

En particulier, $G$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad G'(x) = \frac{F'(x)x - F(x)}{x^2} = \frac{xf(x) - F(x)}{x^2}.$$

Étudions la dérivabilité en 0. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{G(x) - G(0)}{x} = \frac{G(x) - 1}{x} = \frac{F(x) - x}{x^2}$$

Or $F$ est de classe $\mathcal{C}^2$ donc on a le DL d'ordre 2 suivant en 0 (avec Taylor-Young) :

$$F(x) = x + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$$

Ainsi :

$$\frac{G(x) - G(0)}{x} = \frac{F(x) - x}{x^2} = \underset{x \to 0}{o}(1).$$

Ainsi $G$ est dérivable en 0 et $G'(0) = 0$.

3. Soit $0 < x < y$. Alors pour tout $u \in [0, 1]$ on a :

$$e^{-(ux)^2} \leq e^{-(uy)^2}.$$

Donc en intégrant entre 0 et 1 on a :

$$G(y) \leq G(x).$$

Ainsi $G$ est décroissante sur $[0, +\infty[$.
De même pour $x < y < 0$. Alors pour tout $u \in [0, 1]$ on a :

$$e^{-(ux)^2} \geq e^{-(uy)^2}.$$

Donc en intégrant entre 0 et 1 on a :

$$G(y) \geq G(x).$$

Ainsi $G$ est croissante sur $]-\infty, 0]$.