Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

TP Python – 1

Révisions : suites et fonctions

4 Étude d'une suite récurrente

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (x-1)^2$.
On définit une suite (u_n) en posant : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

1. et 2. Le code :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    """ fonction f
    """
    return (x-1)**2

def fof(x):
    """ fonction fof
    """
    return f(f(x))

X = np.linspace(0,3,100)   #vecteur de 100 points de 0 à 3
Y = f(X)   #vecteur des images des éléments de X
plt.plot(X,X)   # graphe de X en fonction de X
plt.plot(X,Y)   # graphe de Y en fonction de X
plt.show()      # commande d'affichage
```

On obtient le graphique suivant :

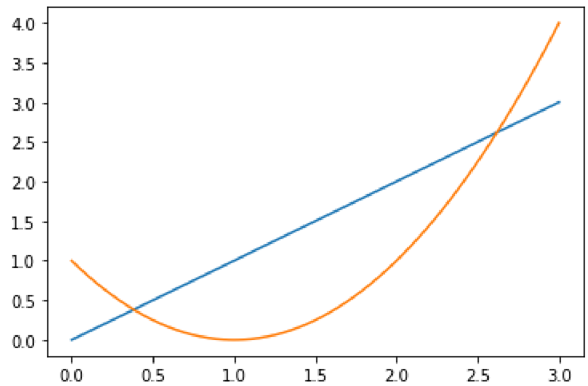

Figure 1 – En orange ,le graphe de f ; en bleu, la droite $y = x$

On conjecture que f est décroissante sur $]-\infty, , 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$ et qu'elle possède deux points fixes (les abscisses des points d'intersection des deux courbes).

3. Compte tenu du signe de $x \mapsto f(x) - x$ sur $[0,1]$ que l'on conjecture sur le graphe, on obtient l'algo de dichotomie suivante

```
def dicho(eps):
"""
Entrée : eps >0
Sortie : valeur approchée de a à eps près
"""
    m = 0
    M = 1
    c = (m+M)/2
    while np.abs(m-M)>eps:
        if f(c)-c > 0:
            m = c
            c = (m+M)/2
        else :
            M = c
            c = (m+M)/2
    return c
```

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = x \iff (x-1)^2 = x \iff x^2 - 3x + 1 = 0 \iff x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Les points fixes de f sont donc $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Comme a est le plus petit, on trouve $a = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

```
In [1]: (3-np.sqrt(5))/2
Out[1]: 0.3819660112501051

In [1]: dicho(10**(-3))
Out[7]: 0.38232421875
```

4. Le code

```
def suite(n,u0):
    """
    Entrées : un entier n et u0
    Sortie : la liste [u0,...,un] des termes de la suite
    """
    L=[u0]
    for k in range(n):
        L.append(f(L[-1]))
    return L
```

5. Dans cette question on suppose que $u_0 = 3$.
   (a) Dans une nouvelle cellule, recopier et compléter le programme suivant pour qu'il affiche les dix premiers termes de la suite $(\ln(u_n))_n$:

```python
N = range(10)
U = suite(9,3.0)   # liste [u0,...,u9]
U = [np.log(u) for u in U]   # lites [ln(u0),...,ln(u9)]
plt.plot(N,U,'o')
plt.show()
```

On obtient le graphique suivant :

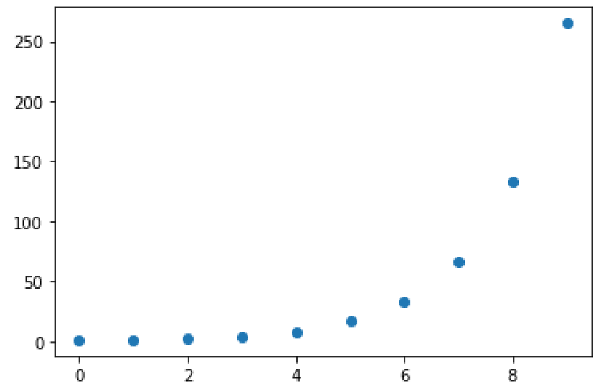

FIGURE 2 – Représentation graphique de $(\ln(u_n))_n$.

On conjecture que $(\ln(u_n))_n$ donc (u_n) divergent.

(b) La fonction f est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = 2(x-1).$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit, comme f est croissante sur $[1, +\infty[$ que :

$$f([3, +\infty[) = [f(3), +\infty[= [4, +\infty[\subset [3, +\infty[.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n \geq 3$.

— Initialisation : $u_1 = f(u_0) = 4 \geq u_0 = 3$ donc la propriété est vraie au rang 0.

— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_{n+1} \geq u_n \geq 3$. Par croissance de f sur $[3, +\infty[$ on a alors :

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq u_{n+1} = f(u_n) \geq f(3) \geq 3.$$

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

— Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n \geq 3$.

La suite est donc croissante. Par le théorème de la limite monotone, soit elle est convergente soit elle diverge vers $+\infty$.
Or : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(u_n) = u_{n+1}$ et f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc si la suite convergeait vers une limite ℓ, on aurait par passage à la limite :

$$f(\ell) = \ell \quad \text{donc} \quad \ell \in \{a, b\}.$$

D'autre part, comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3$, on aurait aussi $\ell \geq 3$.
Cela est impossible car a et b sont strictement inférieurs à 3.
Par conséquent, (u_n) diverge vers $+\infty$ ce qui est cohérent avec la simulation numérique.

6. Dans cette question on suppose que $u_0 \in [0, 1]$ (pour les simulations numériques, on prendra $u_0 = 0.5$).
   (a) On obtient le graphique suivante :

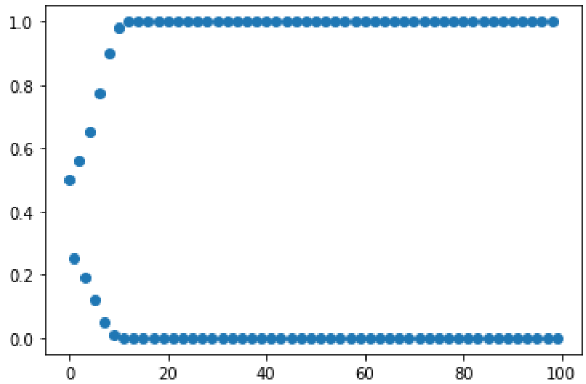

FIGURE 3 – Représentation graphique de $(u_n)_n$.

Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) semblent converger vers des limites différentes et donc, (u_n) semble diverger.

   (b) On obtient :

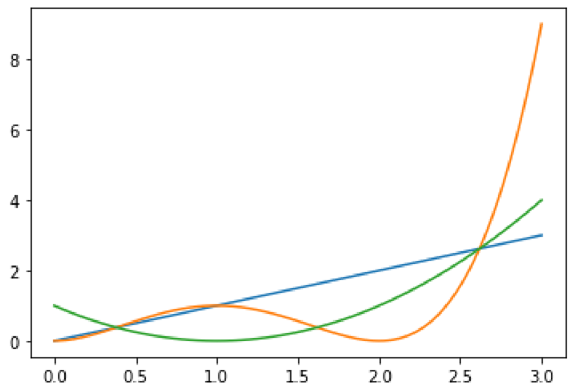

FIGURE 4 – En orange, courbe représentative de $f \circ f$.

On conjecture que :

— $f \circ f$ est croissante sur $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$; décroissante sur $[1, 2]$;

— 0, a, b et 1 sont des points fixes de $f \circ f$.

(c) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f \circ f(x) = \left((x-1)^2 - 1\right)^2 = x^2(x-2)^2.$$

En particulier, $f \circ f$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(f \circ f)'(x) = 2x(x-2)^2 + 2x^2(x-2) = 2x(x-2)(x-2+x) = 2x(x-2)(2x-2).$$

On en déduit :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
Signe		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de $f \circ f$	$+\infty$ $\searrow$		0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Pour les points fixes : sont $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f \circ f(x) = x \iff x^2(x-2)^2 = x &\iff x^2(x-2)^2 - x = 0 \\ &\iff x(x(x-2)^2 - 1) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x(x-2)^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Or on peut remarquer que $x(x-2)^2 - 1 = (x-1)(x^2-3x+1) = (x-1)(f(x)-x)$ donc :

$$f \circ f(x) = x \iff x^2(x-2)^2 = x \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 1 \quad \text{ou} \quad f(x) = x.$$

Les points fixes de $f \circ f$ sont donc 0 , 1, a et b.

(d) Le tableau de variation montre que $[0,1]$ est stable par $f \circ f$. Comme u_0 et u_1 sont dans $[0,1]$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1})$$

un raisonnement par récurrence montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ u_{2n} et u_{2n+1} sont dans $[0,1]$.

Ensuite en utilisant la croissance de $f \circ f$ sur $[0,1]$ on montre par récurrence que :

— si $u_0 \leq u_2$ alors pour tout n, $u_{2n} \leq u_{2(n+1)}$

— si $u_0 \geq u_2$ alors pour tout n, $u_{2n} \geq u_{2(n+1)}$.

D'où la monotonie de (u_{2n}).

La monotonie de (u_{2n+1}) se montre pareil. Par ailleurs, f étant décroissante sur $[0,1]$

— si $u_0 \leq u_2$ alors $u_1 \geq u_3$

— si $u_0 \geq u_2$ alors $u_1 \leq u_3$

si bien que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont de sens de monotonie contraire.

(e) Le suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et bornées donc elles convergent vers une limite ℓ et ℓ' qui sont des points fixes de $f \circ f$.

Tous les termes étant dans $[0, 1]$ ℓ et ℓ' le sont aussi si bien que :

$$\ell, \ell' \in \{0, 1, a\}.$$

De plus : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = f(u_{2n})$ donc $\ell' = f(\ell)$.

— **Cas où** $u_0 \in]0, a[$. Alors comme $[0, a]$ est stable par $f \circ f$ (on s'en convainc facilement avec le tableau de variation) alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \in [0, a]$.
Le signe de $f \circ f(x) - x$ sur $[0, a]$ (voir le graphique 4) donne alors :

$$u_0 \geq u_2.$$

Donc (u_{2n}) est décroissante et (u_{2n+1}) croissante. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell \leq u_{2n} \leq u_0 < a$ alors $\ell = 0$.
Par suite $\ell' = f(\ell) = 1$.

— **Cas où** $u_0 \in]a, 1[$. Alors comme $[a, 1]$ est stable par $f \circ f$ (on s'en convainc facilement avec le tableau de variation) alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [a, 1]$.
Le signe de $f \circ f(x) - x$ sur $[a, 1]$ (voir le graphique 4) donne alors :

$$u_0 \leq u_2.$$

Donc (u_{2n}) est croissante et (u_{2n+1}) décroissante. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell \geq u_{2n} \geq u_0 > a$ alors $\ell = 1$.
Par suite $\ell' = f(\ell) = 0$.

C'est cohérent avec le graphe de la question 6.(a).

7.