Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

TP Python – 2

Méthodes numériques pour le calcul intégral

Le but de ce TP est de présenter quelques méthodes permettant de calculer de façon approchée une intégrale

$$\int_a^b f(t)dt$$

où f est continue sur $[a, b]$.
On reverra notamment la **méthode des rectangles** vue l'an dernier ainsi que quelques variantes.
Pour ce TP, vous aurez besoin de faire les imports suivants :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

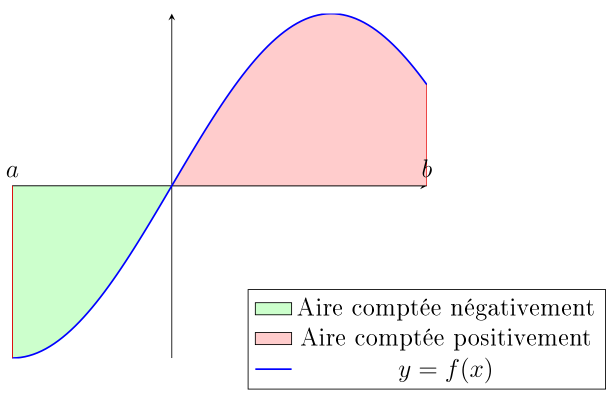
1 Méthode des rectangles

1.1 Rappel : interprétation géométrique de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. L'intégrale

$$\int_a^b f(t)dt$$

correspond géométriquement à *l'aire algébrique* délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
L'*aire algébrique* signifie que l'aire des portions situées sous l'axe des abscisses est comptée négativement et l'aire des portions situées au dessus l'axe des abscisses est comptée positivement.



Ainsi : $\int_a^b f(t)dt = \boxed{} - \boxed{}$.

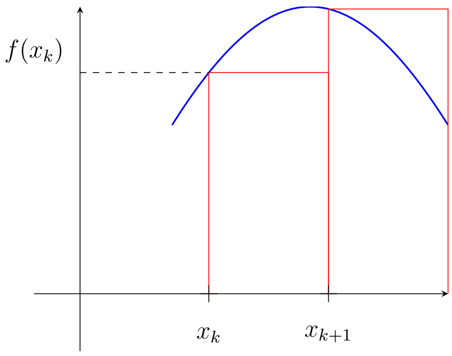
1.2 Méthode des rectangles

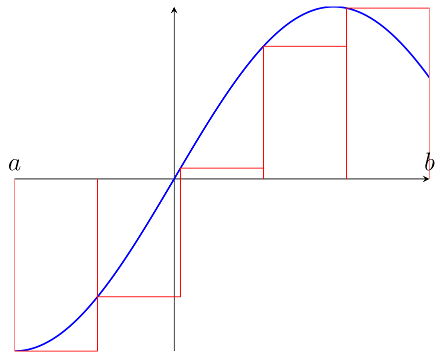
La méthode des rectangles consiste à subdiviser le segment $[a, b]$ en $n \in \mathbb{N}^*$ sous intervalles de même longueur

$$I_k = [x_k, x_{k+1}] \quad \text{où} \quad x_k = a + k\frac{b-a}{n} \quad \text{et} \quad k \in [\![0, n-1]\!]$$

et à approcher l'aire sous la courbe par l'aire des rectangles de base I_k, $k \in [\![0, n-1]\!]$. Plus précisément :

- la méthode des rectangles à *gauche* : les rectangles sont de hauteur $f(x_k)$.

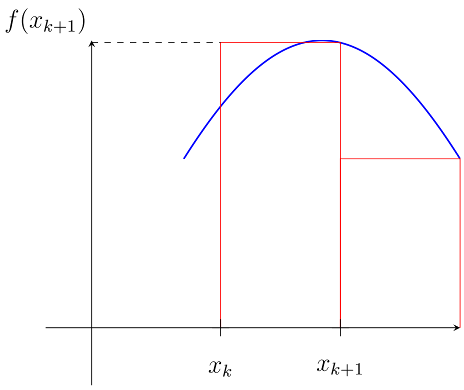


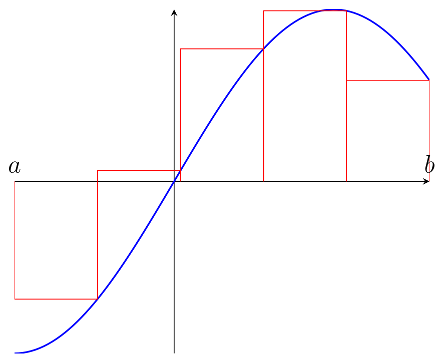


L'aire du $k^{\text{ième}}$ rectangle est : $(x_{k+1} - x_k) \times f(x_k) = \dfrac{b-a}{n} f(x_k)$ et la valeur approchée de l'intégrale obtenue est donc :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \approx \int_a^b f(t)dt.$$

- la méthode des rectangles à *droite* : les rectangles sont de hauteur $f(x_{k+1})$.





L'aire du $k^{\text{ième}}$ rectangle est : $(x_{k+1} - x_k) \times f(x_{k+1}) = \dfrac{b-a}{n} f(x_{k+1})$ et la valeur approchée de l'intégrale obtenue est donc :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \approx \int_a^b f(t)dt.$$

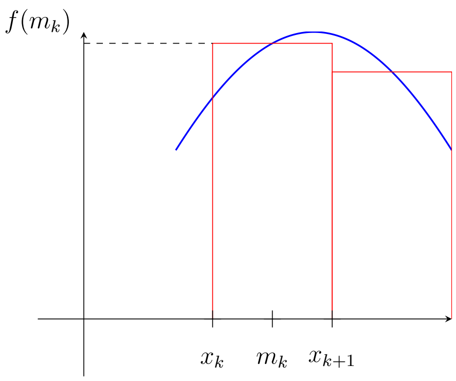
Les résultats de cours sur les sommes de Riemann assurent que quand la largeur des rectangles tend vers 0, c'est-à-dire quand n tend vers $+\infty$, l'aire des rectangles tend vers $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Travail demandé

1. Écrire une fonction `Rectangle_g(f,a,b,n)` qui prend en argument une fonction f définie sur un segment $[a,b]$ et donne la valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ obtenue avec la méthode des rectangles à gauche pour n rectangles.
2. Tester, avec $n = 5, 10, 100$ avec les fonctions suivantes sur $[0,1]$
$$f_1 : x \mapsto \frac{4}{1+x^2} \quad ; \quad f_2 : x \mapsto \frac{1}{1+x} \quad ; \quad f_3 : x \mapsto 4\sqrt{1-x^2}.$$
Comparer avec les valeurs exactes.

1.3 Méthode des rectangles milieux

La méthode des rectangles milieux consiste à approcher l'aire sous la courbe par des rectangles non plus de hauteur $f(x_k)$ (comme pour les rectangles à gauche) ou $f(x_{k+1})$ (comme pour les rectangles à droite) mais par des rectangles dont la hauteur est donnée par la valeur de f au milieu m_k de l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$.

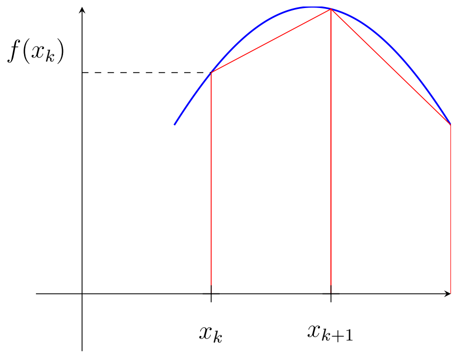


Travail demandé

1. Montrer que la valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ obtenue par cette méthode est :
$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right).$$
2. (a) Écrire une fonction `Rectangle_m(f,a,b,n)` qui prend en argument une fonction f définie sur un segment $[a,b]$ et donne la valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ obtenue avec la méthode des rectangles milieux pour n rectangles.
   (b) Tester pour différentes valeurs de n avec des fonctions affines. Que remarque-t-on ? Est-ce le cas pour la méthode précédente ?
   Prouver ces résultats.
   (c) Tester, avec $n = 5, 10, 100$ avec les fonctions du paragraphe précédant et comparer avec les valeurs exactes.

2 Méthode des trapèzes

La méthode des trapèze consiste à approcher l'aire sous la courbe non plus par des rectangles mais par des trapèzes :



Travail demandé

1. (a) Justifier que l'aire du $k^{\text{ième}}$ trapèze est : $\dfrac{b-a}{2n}(f(x_k)+f(x_{k+1}))$.

   (b) En déduire que la valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ obtenue par cette méthode est :
$$\frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}(f(a)+f(b))+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

2. (a) Écrire une fonction `Trapeze(f,a,b,n)` qui prend en argument une fonction f définie sur un segment $[a,b]$ et donne la valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ obtenue avec la méthode des trapèzes pour n trapèzes.

   (b) Tester, avec $n=5,10,100$ avec les fonctions du paragraphe précédant et comparer avec les valeurs exactes.

3 Méthode de Simpson

La méthode de Simpson consiste à approcher l'aire sous la courbe non plus par des quadrilatères mais par des morceaux de paraboles.
Plus précisément, on approche l'aire sous la courbe entre x_k et x_{k+1} par l'aire sous la parabole passant par les points $(x_k, f(x_k))$, $(m_k, f(m_k))$ et $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$.

Travail demandé

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![0,n-1]\!]$.

   (a) Déterminer une fonction polynomiale P_k de degré 2 telle que :
$$P_k(x_k)=f(x_k)\quad;\quad P_k(m_k)=f(m_k)\quad;\quad P_k(x_{k+1})=f(x_{k+1}).$$

(b) Calculer $\int_{x_k}^{x_{k+1}} P_k(x)dx$ et en déduire que la valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$ obtenue par cette méthode est :

$$\frac{b-a}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_k)+4f(m_k)+f(x_{k+1})).$$

2. (a) Écrire une fonction `Simpson(f,a,b,n)` qui prend en argument une fonction f définie sur un segment $[a,b]$ et donne la valeur approchée de $\int_a^b f(t)dt$ obtenue avec la méthode de Simpson.
   (b) Tester pour différentes valeurs de n avec des fonctions polynomiales de degré 2. Que remarque-t-on ? Est-ce le cas pour les méthodes précédentes ?
   Prouver ces résultats.
   (c) Tester, avec $n = 5, 10, 100$ avec les fonctions du paragraphe précédant et comparer avec les valeurs exactes.

4 Comparaison des méthodes

Pour quantifier la qualité de la méthode d'approximation, il est important de s'intéresser à la vitesse à laquelle la valeur approchée tend vers la valeur exacte quand n tend vers $+\infty$.
Plus précisément, on s'intéresse à l'erreur commise lorsqu'on fait l'approximation avec n quadrilatères :

$$E_n(f,a,b) = \left|\text{Valeur approchée} - \int_a^b f(t)dt\right|.$$

Par exemple, pour la méthode des rectangles à gauche :

$$E_n(f,a,b) = \left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(t)dt\right|.$$

Pour que la méthode fournisse une valeur approchée de l'intégrale recherchée, il faut que l'erreur tende vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Plus la convergence vers 0 est rapide, meilleure est la méthode.

Travail demandé

1. Pour chacune des fonctions du premier paragraphe, représenter sur un même graphique l'erreur $E_n(f,a,b)$ en fonction de $n \in [\![5,50]\!]$ pour chacune des méthodes précédentes.
2. Quelle(s) méthode(s) semble(nt) le plus efficace ?

5 Pour aller plus loin

5.1 Erreur pour la méthode des rectangles à gauche

On se propose d'étudier mathématiquement l'erreur dans le cas de la méthode des rectangles à gauche. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier que f' est bornée sur $[a,b]$ puis que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:
$$\forall x \in [x_k, x_{k+1}], \quad |f(x) - f(x_k)| \leq M(x - x_k) \quad \text{où M est le sup de } |f'|.$$
2. Montrer que :
$$E_n(f,a,b) = \left|\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))dx\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)|dx.$$
3. En déduire que :
$$E_n(a,b,f) \leq \frac{(b-a)^2 M}{2n}.$$
4. En considérant une fonction affine, montrer que cette inégalité est optimale.

5.2 Erreur pour la méthode des rectangles milieux

On se propose d'étudier mathématiquement l'erreur dans le cas de la méthode des rectangles milieux. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier que f'' est bornée sur $[a,b]$. On note M le sup de $|f''|$ sur $[a,b]$.
2. (a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:
$$\forall t \in [x_k, x_{k+1}], \quad |f'(t) - f'(m_k)| \leq M|t - m_k|.$$
   (b) En déduire que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ et tout $x \in [x_k, x_{k+1}]$:
$$-M\frac{(x-m_k)^2}{2} \leq f(x) - f(m_k) - f'(m_k)(x - m_k) \leq M\frac{(x-m_k)^2}{2}.$$
3. (a) Montrer :
$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(f'(m_k)(x-m_k) - M\frac{(x-m_k)^2}{2}\right) dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(m_k))dx$$
   et
$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(m_k))dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(f'(m_k)(x-m_k) + M\frac{(x-m_k)^2}{2}\right) dx$$
   (b) Calculer pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x-m_k)^2}{2} dx \quad \text{et} \quad \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - m_k)dx.$$
   (c) En déduire :
$$-M\frac{(b-a)^3}{24n^2} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(m_k))dx \leq M\frac{(b-a)^3}{24n^2}.$$
4. Conclure que : $E_n(f,a,b) \leq M\dfrac{(b-a)^3}{24n^2}$.
5. Les résultats de la question précédente et du résultat analogue pour la méthode des rectangles à gauche sont-ils cohérents avec les observations du paragraphe 4 ?

5.3 Erreur pour la méthode de Simpson

On peut montrer par des techniques analogues mais plus fines que l'erreur pour la méthode de Simpson vérifie :

$$E_n(f,a,b) \leq C\frac{(b-a)^5}{n^4}$$

où C est une constante.
Très concrètement une majoration en $\frac{1}{n}$ (comme dans la méthode des rectangles à gauche) signifie qu'en multipliant le nombre de points de la subdivision par 10 alors l'écart entre notre somme de Riemann et l'intégrale est divisé par 10, autrement dit on gagne à coup sûr un chiffre sur le résultat.
Pour une majoration en $\frac{1}{n^2}$ (comme dans la méthode des rectangles milieux), on divise l'écart par 100, et donc on gagne deux chiffres.
Pour une majoration en $\frac{1}{n^4}$ (comme dans la méthode de Simpson), on divise l'écart par 10000, et donc on gagne quatre chiffres !