

## TP Python – 2

## MÉTHODES NUMÉRIQUES POUR LE CALCUL INTÉGRAL

## 1 Méthode des rectangles

## 1.2 Méthode des rectangles

1. Code pour la méthode des rectangles à gauche :

```

1 def Rectangle_g(f,a,b,n):
2     """
3     Arguments : fct f, intervalle [a,b] , nb de
4     subdivision n
5     Sortie : valeur approchée de intégrale de f sur [a,b]
6     par la méthode des rectangles à gauche avec n
7     rectangles
8     """
9     x=a
10    S=0
11    for k in range(n):
12        S = S + f(x)
13        x = x + (b-a)/n
14    return (b-a)/n*S

```

2. Après avoir définie les fonctions  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$  dans python :

— pour  $f_1$  :

```

1 In[1]: Rectangle_g(f1,0,1,5)
2 Out[1]: 3.33492611381099
3
4 In[2]: Rectangle_g(f1,0,1,10)
5 Out[2]: 3.2399259889071588
6
7 In[3]: Rectangle_g(f1,0,1,100)
8 Out[3]: 3.151575986923129

```

Cela est cohérent avec la valeur exacte qui vaut :

$$\int_0^1 f_1(t)dt = [4 \arctan(t)]_0^1 = \pi.$$

— Pour  $f_2$  :

```

1 In[5]: Rectangle_g(f2,0,1,5)
2 Out[5]: 0.7456349206349208
3
4 In[6]: Rectangle_g(f2,0,1,10)

```

```

5 Out[6]: 0.718771403175428
6
7 In[7]: Rectangle_g(f2,0,1,100)
8 Out[7]: 0.6956534304818242

```

Cela est cohérent avec la valeur exacte qui vaut :

$$\int_0^1 f_1(t)dt = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$$

— Pour  $f_3$  :

```

1 In[8]: Rectangle_g(f3,0,1,5)
2 Out[8]: 3.437048828883551
3
4 In[9]: Rectangle_g(f3,0,1,10)
5 Out[9]: 3.304518326248319
6
7 In[10]: Rectangle_g(f3,0,1,100)
8 Out[10]: 3.1604170317790428

```

Cela est cohérent avec la valeur exacte. En effet, en effectuant le changement de variable  $x = \sin(t)$  on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_3(x)dx &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cos(t)dt \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(t)} \cos(t)dt \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt \quad \text{car } \cos \text{ est positive sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(2t) + 1)dt \\
&= [\sin(2t) + 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

La méthode semble bien converger vers la valeur de l'intégrale mais assez lentement puisqu'avec un pas de 100, on obtient qu'une valeur approchée à seulement  $10^{-1}$ .

### 1.3 Méthode des rectangles milieu

1. Pour  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , le  $k$ -ème rectangle est le rectangle de base  $[x_k, x_{k+1}]$  et de hauteur  $f(m_k)$ . Son aire algébrique est donc :

$$(x_{k+1} - x_k)f(m_k) = \frac{b-a}{n} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) = \frac{b-a}{n} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right).$$

La valeur approchée de  $\int_a^b f(t)dt$ , obtenue en sommant l'aire de tous ces rectangles est donc :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right).$$

2. (a) Code pour la méthode des rectangles milieu :

```

1 def Rectangle_m(f,a,b,n):
2     """
3     Arguments : fct f, intervalle [a,b] , nb de
4     subdivision n
5     Sortie : valeur approchée de intégrale de f sur
6     [a,b] par la méthode des rectangles
7     milieu avec n rectangles
8     """
9     h= (b-a)/n # pas de la subdivision
10    m=(a+a+h)/2 # milieu de l'intervalle
11    S=0
12    for k in range(n):
13        S = S + f(m) # somme des aires des rectangles
14        m = m + h
15    return h*S

```

(b) En testant avec la fonction  $x \mapsto x - 1$  par exemple, on trouve pour  $n$  de 1 à 7 :

```

1 -0.5
2 -0.5
3 -0.5
4 -0.5
5 -0.500000000000000001
6 -0.5
7 -0.5

```

On peut conjecturer que la méthode des rectangles milieu fournit la valeur exacte pour les polynômes de degré et ce peut importe le pas de subdivision.

Prouvons-le : soit  $f : x \mapsto \mu x + \lambda$  une fonction polynômiale de degré 1 sur un intervalle  $[a, b]$ . On a d'une part :

$$\int_a^b f(x)dx = \left[ \mu \frac{x^2}{2} + \lambda x \right]_a^b = \mu \frac{b^2 - a^2}{2} + \lambda(b - a).$$

D'autre part, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la valeur approchée avec  $n$  rectangles est :

$$\begin{aligned}
\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right) &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mu\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right) + \lambda\right) \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu\left(a + \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{b-a}{n}\right) + \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda \\
&= \frac{\mu(b-a)}{n} \left(na + n \frac{b-a}{2n} + \frac{b-a}{n} \frac{n(n-1)}{2}\right) + \lambda(b-a) \\
&= \frac{\mu(b-a)}{n} \left(na + \frac{b-a}{2} + \frac{(b-a)(n-1)}{2}\right) + \lambda(b-a) \\
&= \frac{\mu(b-a)}{n} \left(na + \frac{(b-a)n}{2}\right) + \lambda(b-a) \\
&= \mu(b-a) \frac{b+a}{2} + \lambda(b-a) \\
&= \mu \frac{b^2 - a^2}{2} + \lambda(b-a).
\end{aligned}$$

Donc la valeur approchée est en fait exacte dans ce cas.

(c) Pour la fonction  $f_1$  (le comportement est le même pour les autres), on obtient :

```

1 In[16]: Rectangle_m(f1, 0, 1, 5)
2 Out[16]: 3.1449258640033277
3
4 In[17]: Rectangle_m(f1, 0, 1, 10)
5 Out[17]: 3.1424259850010987
6
7 In[18]: Rectangle_m(f1, 0, 1, 100)
8 Out[18]: 3.1416009869231245

```

La méthode semble bien converger vers la valeur de l'intégrale. La convergence semble plus rapide que la méthode précédente : avec  $n = 10$  on a déjà une valeur approchée à  $10^{-2}$  près et à  $n = 100$  à  $10^{-4}$  près.

## 2 Méthode des trapèzes

1. (a) En mettant bout à bout deux copies du  $k$ -ième trapèze en quinconce, on obtient un rectangle de base  $[x_k, x_{k+1}]$  et de hauteur  $f(x_k) + f(x_{k+1})$ . On en déduit que l'aire du  $k^{\text{ième}}$  trapèze, qui vaut la moitié de l'aire de ce rectangle est :  $\frac{b-a}{2n}(f(x_k) + f(x_{k+1}))$ .

(b) La valeur approchée de  $\int_a^b f(t)dt$  obtenue par cette méthode est donc :

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k) + f(x_{k+1})) &= \frac{b-a}{2n} \left( \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) \right) \\ &= \frac{b-a}{2n} \left( \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \sum_{i=1}^n f(x_i) \right) \quad \text{en posant } i = k + 1 \\ &= \frac{b-a}{2n} \left( f(x_0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n) \right) \\ &= \frac{b-a}{2n} \left( f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right). \end{aligned}$$

On retrouve bien :

$$\frac{b-a}{n} \left( \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right).$$

2. (a) Le code pour la méthode des trapèzes :

```

1 def Trapeze(f, a, b, n):
2     """
3     Arguments : fct f, intervalle [a,b] , nb de
4     subdivision n
5     Sortie : valeur approchée de intégrale de f sur
6     [a,b] par la méthode des trapèzes avec n rectangles
7     """
8     h= (b-a)/n # pas de la subdivision
9     x=a
10    S=0
11    for k in range(n):
12        S = S + 1/2*h*(f(x)+f(x+h)) # somme des aires des trapèzes
13        x=x+h
14    return S

```

(b) Pour la fonction  $f_1$  (le comportement est le même pour les autres), on obtient :

```

1 In[16]: Trapeze(f1, 0, 1, 5)
2 Out[16]: 3.13492611381099
3
4 In[17]: Trapeze(f1, 0, 1, 10)
5 Out[17]: 3.1399259889071596
6
7 In[18]: Trapeze(f1, 0, 1, 100)
8 Out[18]: 3.1415759869231303

```

La méthode semble bien converger vers la valeur de l'intégrale. La convergence semble plus rapide que la méthode précédente : avec  $n = 10$  on a déjà une valeur approchée à  $10^{-2}$  près et à  $n = 100$  à  $10^{-4}$  près.

### 3 Méthode de Simpson

La méthode de Simpson consiste à approcher l'aire sous la courbe non plus par des quadrilatères mais par des morceaux de paraboles.

Plus précisément, on approche l'aire sous la courbe entre  $x_k$  et  $x_{k+1}$  par l'aire sous la parabole passant par les points  $(x_k, f(x_k))$ ,  $(m_k, f(m_k))$  et  $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ .

#### Travail demandé

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

(a) On cherche  $P_k$  de degré 2 telle que :

$$P_k(x_k) = f(x_k) \quad ; \quad P_k(m_k) = f(m_k) \quad ; \quad P_k(x_{k+1}) = f(x_{k+1}).$$

Posons  $Q_k = P_k - f(x_k)$ . Alors  $Q_k$  vérifie :

$$Q_k(x_k) = 0 \quad ; \quad Q_k(m_k) = f(m_k) - f(x_k) \quad ; \quad Q_k(x_{k+1}) = f(x_{k+1}) - f(x_k).$$

En particulier,  $x_k$  est une racine de  $Q_k$  donc il existe  $u, v$  tels que :

$$Q_k = (X - x_k)(uX + v).$$

Comme  $Q_k(m_k) = f(m_k) - f(x_k)$  on obtient :

$$(L_1) \quad f(m_k) - f(x_k) = (m_k - x_k)(um_k + v) = \frac{b-a}{2n}(um_k + v).$$

Comme  $Q_k(x_{k+1}) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$  on obtient :

$$(L_2) \quad f(x_{k+1}) - f(x_k) = (x_{k+1} - x_k)(ux_{k+1} + v) = \frac{b-a}{n}(um_k + v).$$

En faisant  $L_2 - 2L_1$  on trouve :

$$u = \frac{2n^2}{(b-a)^2}(f(x_{k+1}) - 2f(m_k) + f(x_k)).$$

On a alors

$$v = \frac{2n}{b-a}(f(m_k) - f(x_k)) - um_k$$

Puis  $P_k = Q_k + f(x_k)$ .

(b) On a, par IPP :

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_k(x) dx &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} ((x - x_k)(uX + v) + f(x_k)) dx \\ &= \left[ \frac{(x - x_k)^2}{2}(ux + v) \right]_{x_k}^{x_{k+1}} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} u \frac{(x - x_k)^2}{2} dx + f(x_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &= \frac{(b-a)^2}{2n^2}(x_{k+1}u + v) - u \left[ \frac{(x - x_k)^3}{6} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} + \frac{(b-a)f(x_k)}{n} \\ &= \frac{b-a}{2n}(f(x_{k+1}) - f(x_k)) - u \frac{(b-a)^3}{6n^3} + \frac{(b-a)f(x_k)}{n} \\ &= \frac{b-a}{2n}(f(x_{k+1}) - f(x_k)) - (f(x_{k+1}) - 2f(m_k) + f(x_k)) \frac{(b-a)}{3n} \\ &\quad + \frac{(b-a)f(x_k)}{n} \\ &= \frac{b-a}{6n}(f(x_{k+1}) + 4f(m_k) + f(x_k)). \end{aligned}$$

La valeur approchée de  $\int_a^b f(t)dt$  obtenue par cette méthode est donc la somme des aires des portion de paraboles obtenues l :

$$\frac{b-a}{6n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k) + 4f(m_k) + f(x_{k+1})).$$

2. (a) Le code pour la méthode de Simpson :

```

1 def Simpson(f, a, b, n):
2     """
3     Arguments : fct f, intervalle [a,b] ,
4     nb de subdivision n
5     Sortie : valeur approchée de intégrale de f
6     sur [a,b] par la méthode de Simpson
7     avec n subdivisions
8     """
9     h=(b-a)/n #pas de la subdivision
10    x = a
11    S = 0
12    for k in range(n):
13        S = S + f(x)+f(x+h)+4*f(x+h/2)
14        x = x+h
15    return h/6*S

```

(b) En testant avec  $x \mapsto x^2 - 2x + 3$  sur  $[0, 1]$  on trouve pour  $n$  entre 1 et 7 :

```

1 2.3333333333333333
2 2.3333333333333333
3 2.3333333333333333
4 2.3333333333333333
5 2.3333333333333335
6 2.3333333333333333
7 2.3333333333333326

```

La méthode semble donnée la valeur exacte  $\frac{7}{3}$  sur les polynômes de degré 2 pour n'importe quel pas.

En effet, si  $f$  est un polynôme de degré deux alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $P_k = f$  donc la valeur approchée que l'on obtient est :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_k(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

(c) Pour la fonction  $f_1$  (le comportement est le même pour les autres), on obtient :

```

1 In [24]: Simpson(f1, 0, 1, 5)
2 Out [24]: 3.1415926139392147
3
4 In [26]: Simpson(f1, 0, 1, 10)
5 Out [25]: 3.1415926529697855

```

```

6
7 In [26]: Simpson(f1, 0, 1, 100)
8 Out [26]: 3.141592653589791

```

La méthode semble bien converger vers la valeur de l'intégrale. La convergence semble bien plus rapide que les méthodes précédentes : avec  $n = 10$  on a déjà une valeur approchée à  $10^{-4}$  près et à  $n = 100$  à  $10^{-14}$  près !

## 4 Comparaison des méthodes

Pour quantifier la qualité de la méthode d'approximation, il est important de s'intéresser à la vitesse à laquelle la valeur approchée tend vers la valeur exacte quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Plus précisément, on s'intéresse à l'erreur commise lorsqu'on fait l'approximation avec  $n$  quadrilatères :

$$E_n(f, a, b) = \left| \text{Valeur approchée} - \int_a^b f(t) dt \right|.$$

Par exemple, pour la méthode des rectangles à gauche :

$$E_n(f, a, b) = \left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(t) dt \right|.$$

Pour que la méthode fournisse une valeur approchée de l'intégrale recherchée, il faut que l'erreur tende vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Plus la convergence vers 0 est rapide, meilleure est la méthode.

### Travail demandé

1. Le code :

```

1 N = range(2, 50)
2 E1 = [np.abs(Simpson(f1, 0, 1, n) - np.pi) for n in N]
3 E2 = [np.abs(Rectangle_m(f1, 0, 1, n) - np.pi) for n in N]
4 E3 = [np.abs(Trapeze(f1, 0, 1, n) - np.pi) for n in N]
5 E4 = [np.abs(Rectangle_g(f1, 0, 1, n) - np.pi) for n in N]
6 plt.plot(N, E3, label='Trapeze')
7 plt.plot(N, E1, label='Simpson')
8 plt.plot(N, E2, label='Rectangles_milieux')
9 plt.plot(N, E4, label='Rectangles_gauche')
10 plt.legend()
11 plt.show()

```

2. On obtient alors les graphiques suivants (je ne mets pas tout sur le même graphique pour des raisons de lisibilité) :

Cela confirme les observations précédentes : la méthode de Simpson semblent bien plus efficace (l'erreur plus petit et qui converge rapidement vers 0) suivie des méthodes des rectangles milieux et des trapèzes (vitesses de convergence vers 0 de l'erreur comparables). La méthode des rectangles à gauche est la moins efficace.

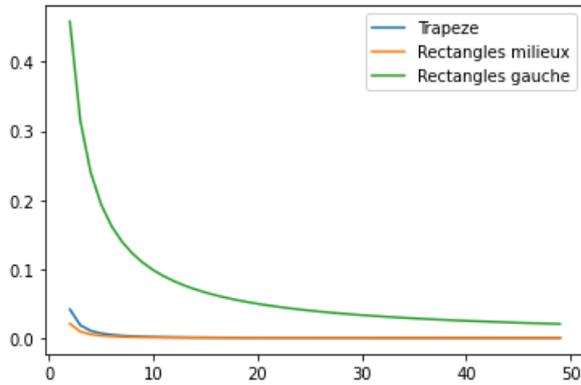


FIGURE 1 – Comparaison de l'erreur des 3 premières méthodes

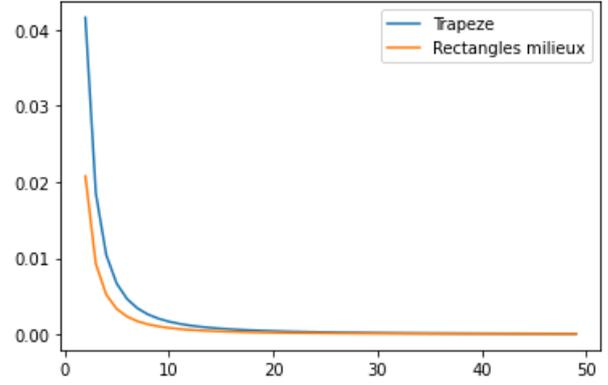


FIGURE 2 – Comparaison de l'erreur Trapèzes/Milieux

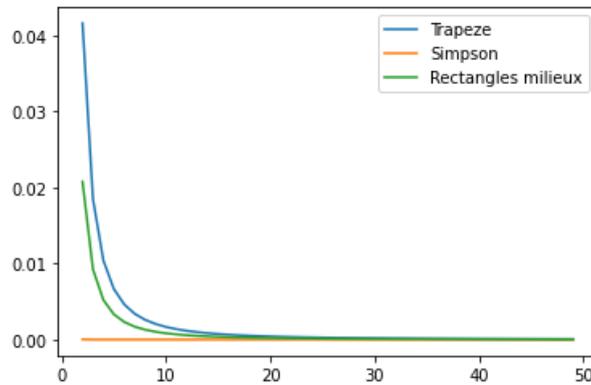


FIGURE 3 – Comparaison de l'erreur Trapèzes/Milieux/Simpson

## 5 Pour aller plus loin

### 5.1 Erreur pour la méthode des rectangles à gauche

On se propose d'étudier mathématiquement l'erreur dans le cas de la méthode des rectangles à gauche. On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$  et soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ ,  $f'$  est continue sur  $[a, b]$ . D'après le théorème des bornes atteintes, elle est bornée sur  $[a, b]$ . Notons  $M$  le maximum de  $|f'|$  sur  $[a, b]$ .

L'inégalité des accroissements finis sur le segment  $[x_k, x_{k+1}]$  donne alors, pour tout  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  :

$$\forall x \in [x_k, x_{k+1}], \quad |f(x) - f(x_k)| \leq M(x - x_k).$$

2. Par définition on a :

$$E_n(f, a, b) = \left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) - \int_a^b f(x) dx \right|.$$

Or on remarque que :

— par la relation de Chasles  $\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$  ;

$$- \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dx = (x_{k+1} - x_k) f(x_k) = \frac{b-a}{n} f(x_k).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E_n(f, a, b) &= \left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k)) dx \right| \end{aligned}$$

puis par inégalité triangulaire :

$$E_n(f, a, b) = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k)) dx \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)| dx.$$

3. Des questions 1 et 2 on déduit par croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned} E_n(f, a, b) &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)| dx \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} M(x - x_k) dx \\ &\leq M \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{(x - x_k)^2}{2} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} \\ &\leq M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} \\ &\leq M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^2}{2n^2} \end{aligned}$$

D'où

$$E_n(a, b, f) \leq \frac{(b-a)^2 M}{2n}.$$

4. Soit  $f : x \mapsto rx + s$  une fonction affine. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( r \left( a + k \frac{b-a}{n} \right) + s \right) \\ &= \frac{b-a}{n} n(ra + s) + r \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k \\ &= (b-a)(ra + s) + r \frac{(n-1)(b-a)^2}{2n} \\ &= (b-a)(ra + s) + \frac{r}{2}(b-a)^2 - r \frac{(b-a)^2}{2n} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \left[ \frac{r}{2}x^2 + sx \right]_a^b \\ &= \frac{r}{2}(b^2 - a^2) + s(b - a).\end{aligned}$$

D'où l'erreur :

$$\begin{aligned}E_n(f, a, b) &= \left| (b - a)(ra + s) + \frac{r}{2}(b - a)^2 - r\frac{(b - a)^2}{2n} - \frac{r}{2}(b^2 - a^2) - s(b - a) \right| \\ &= \left| ra(b - a) + \frac{r}{2}(b - a)^2 - r\frac{(b - a)^2}{2n} - \frac{r}{2}(b^2 - a^2) \right| \\ &= |r| \frac{(b - a)^2}{2n}.\end{aligned}$$

Or  $|r| = \sup |f'|$  donc cela montre que dans le cas affine, l'inégalité de la question précédente est une égalité.

## 5.2 Erreur pour la méthode des rectangles milieux

On se propose d'étudier mathématiquement l'erreur dans le cas de la méthode des rectangles milieux. On suppose que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[a, b]$  et soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[a, b]$  donc  $f''$  est continue sur  $[a, b]$ . D'après le théorème des bornes atteintes, elle est donc bornée sur  $[a, b]$ .
2. (a) D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à  $f'$ , on a, pour tout  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$  :

$$\forall t \in [x_k, x_{k+1}], \quad |f'(t) - f'(m_k)| \leq M|t - m_k|.$$

- (b) Soit  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$  et  $x \in [x_k, x_{k+1}]$ .

— **Cas où**  $x \in [x_k, m_k]$ . Pour tout  $t \in [x_k, m_k]$  l'inégalité de la question précédente se réécrit :

$$-M(m_k - t) \leq f'(t) - f'(m_k) \leq M(m_k - t).$$

En intégrant entre  $x$  et  $m_k$  on obtient par croissance de l'intégrale :

$$-M \int_x^{m_k} (m_k - t)dt \leq f(m_k) - f(x) - f'(m_k)(m_k - x) \leq M \int_x^{m_k} (m_k - t)dt$$

d'où

$$-M \frac{(x - m_k)^2}{2} \leq f(x) - f(m_k) - f'(m_k)(x - m_k) \leq M \frac{(x - m_k)^2}{2}.$$

— **Cas où**  $x \in [m_k, x_k]$ . On fait le même raisonnement mais en intégrant entre  $m_k$  et  $x$ .

3. (a) Soit  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ . D'après la question précédente, on a pour tout  $x \in [x_k, x_{k+1}]$  :

$$f'(m_k)(x - m_k) - M \frac{(x - m_k)^2}{2} \leq f(x) - f(m_k) \leq M \frac{(x - m_k)^2}{2} + f'(m_k)(x - m_k).$$

Donc en intégrant entre  $x_k$  et  $x_{k+1}$  et en sommant pour  $k$  allant de 0 à  $n - 1$  on obtient les inégalités souhaitées par croissance de l'intégrale.

(b) Soit  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x - m_k)^2}{2} dx = \left[ \frac{(x - m_k)^3}{6} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} = 2 \frac{\left(\frac{b-a}{2n}\right)^3}{6} = \frac{(b-a)^3}{24n^3}.$$

et

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - m_k) dx = \left[ \frac{(x - m_k)^2}{2} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} = \frac{\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{b-a}{2n}\right)^2}{2} = 0.$$

(c) Ainsi, avec les questions 3.(a) et 3.(b), on conclut :

$$-M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^3}{24n^3} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(m_k)) dx + 0 \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^3}{24n^3}$$

d'où

$$-M \frac{(b-a)^3}{24n^2} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(m_k)) dx \leq M \frac{(b-a)^3}{24n^2}.$$

**Remarque :** il manquait la constante  $M$  dans l'énoncé (ainsi que dans la question suivante).

4. On a, par la relation de Chasles :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(m_k)) dx = \int_a^b f(x) dx - \sum_{k=0}^{n-1} f(m_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Donc :

$$E_n(f, a, b) = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(m_k)) dx \right|.$$

La question précédente montre alors que :

$$E_n(f, a, b) \leq M \frac{(b-a)^3}{24n^2}.$$

5. Les résultats de la question précédente et du résultat analogue pour la méthode des rectangles à gauche sont cohérents avec les observations du paragraphe 4 : l'erreur converge plus vite vers 0 pour les rectangles milieux que pour les rectangles à gauche.

### 5.3 Erreur pour la méthode de Simpson

On peut montrer par des techniques analogues mais plus fines que l'erreur pour la méthode de Simpson vérifie :

$$E_n(f, a, b) \leq C \frac{(b-a)^5}{n^4}$$

où  $C$  est une constante.

Très concrètement une majoration en  $\frac{1}{n}$  (comme dans la méthode des rectangles à gauche) signifie qu'en multipliant le nombre de points de la subdivision par 10 alors l'écart entre notre somme de Riemann et l'intégrale est divisé par 10, autrement dit on gagne à coup sûr un chiffre sur le résultat.

Pour une majoration en  $\frac{1}{n^2}$  (comme dans la méthode des rectangles milieux), on divise l'écart par 100, et donc on gagne deux chiffres.

Pour une majoration en  $\frac{1}{n^4}$  (comme dans la méthode de Simpson), on divise l'écart par 10000, et donc on gagne quatre chiffres !