Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

Dm 1 – À rendre le 09/10

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats, étapes importantes, ...doivent être mis en valeurs.

Exercice – Une fonction de deux variables

1. Le but de cette question est de démontrer l'inégalité suivante :

$$\forall (a,b,c) \in]0,+\infty[^3, \quad \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

Soit $(a,b,c) \in]0,+\infty[^3$. On note $A = \dfrac{a+b+c}{3}$ et $G = \sqrt[3]{abc}$.

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leq e^x$.

(b) En déduire que :

$$\frac{a}{A} \leq e^{\frac{a}{A}-1}.$$

On admet que de même :

$$\frac{b}{A} \leq e^{\frac{b}{A}-1} \quad \text{et} \quad \frac{c}{A} \leq e^{\frac{c}{A}-1}.$$

(c) En déduire que

$$\frac{G^3}{A^3} \leq e^{\frac{a+b+c}{A}-3}$$

puis conclure.

2. On note f la fonction définie sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$ par :

$$f(x,y) = x + y + \frac{1}{xy}.$$

(a) Justifier soigneusement que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[^2$ et déterminer ses dérivées partielles d'ordre 1.

(b) Démontrer que f admet un unique point critique.

(c) Démontrer que f admet un extremum global que l'on déterminera.

Problème – Intégrales de Wallis et intégrale de Gauss

Le but de cet exercice est de montrer que l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ est convergente et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$.

2. Calculer W_0 et W_1.

3. Montrer que la suite (W_n) est décroissante puis montrer qu'elle converge.

4. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \neq 0$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.

6. Montrer que la suite $((n+1)W_n W_{n+1})_n$ est constante (on calculera la valeur de cette constante).

7. **(a)** Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

Indication : on pourra utiliser la monotonie de $(W_n)_n$.

(b) En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$.

8. Déduire des questions précédentes que :

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Quelle est la limite de W_n quand n tend vers $+\infty$?

9. Montrer par récurrence que pour tout $p \geq 0$ on a :

$$\begin{cases} W_{2p} & = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \\[2ex] W_{2p+1} & = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

Intégrale de Gauss

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

10. Montrer que F est strictement croissante.

11. Pour tout $x \in [1, +\infty[$, montrer que $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.

12. En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

13. Montrer que : $\forall u \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+u) \leq u$.

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer : $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx$.

(b) En utilisant le changement de variable $x = \sqrt{n}\cos(u)$ dans le membre de gauche, en déduire que :

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx.$$

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer : $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{-t^2} \leq \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

(b) En posant le changement de variable $x = \sqrt{n}\tan(u)$ montrer que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx = \sqrt{n} \int_0^B \cos^{2p}(t) dt$$

où $B \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $p \in \mathbb{N}$ sont à déterminer.

(c) Montrer que $\displaystyle\int_0^B \cos^{2p}(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}-B}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}(t) dt$.

(d) Déduire que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

16. Déterminer alors la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

17. A l'aide du changement de variable $x = -t$, en déduire la nature et la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx$ puis celle de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.