Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD3

Équations différentielles

1 Équations différentielles

Exercice 1 (Variables séparées). Résoudre les problèmes de Cauchy suivants en donnant le domaine de validité de votre solution.

1. $y'(x) = y(x)\ln(x)$, $y(1) = 1$.
2. $\dfrac{dy}{dx} = y\ln(x) + 1$, $y(1) = 1$.
3. $y'(x) = -\dfrac{x^2}{y(x)}$, $y(0) = 1$.
4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ avec $y(1) = 1$. On posera $u = \dfrac{y}{x}$ pour tomber sur une équation à variables séparées.

Exercice 2. Résoudre $(1+x^2)^2y''(x) + 2x(1+x^2)y'(x) + 4y(x) = 0$.
Indication : effectuer le changement de fonction $z(t) = y(\tan(t))$, $t \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 3. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$: $x^2y'' + 3xy' + y = 0$.
Indication : on pourra faire le changement de fonction $z(t) = y(e^t)$.

Exercice 4. On considère un couple de fonctions (x, y) de classe C^1 sur $I = [0, +\infty[$ vérifiant :

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} x'(t) &= \sin(x(t))\sin(y(t)) \\ y'(t) &= \cos(x(t))\cos(y(t)) \end{cases} \quad \text{et} \quad x(0) = y(0) = \frac{\pi}{2}.$$

1. Sans résoudre le système, montrer que :

$$\forall t \in I, \quad \sin(x(t))\cos(y(t)) = 0.$$

2. Déterminer l'ensemble E des couples de réels (a, b) tels que $\sin(a)\cos(b) = 0$ et le représenter. Que peut-on dire de $\{(x(t), y(t)) \ , \ t \in I\}$?
3. On suppose dans cette question que x ne prend pas la valeur 0 ni π.
   (a) Montrer que y est constante.
   (b) En déduire que x est solution de $x' = \sin(x)$.
   (c) Résoudre cette équation.
   Indication : on pourra poser $z(t) = \tan\left(\dfrac{x(t)}{2}\right)$.
4. Montrer que x ne prend pas les valeurs 0 et π et en déduire l'unique solution du système.

Exercice 5. On considère un couple (x, y) de fonctions définies de classe C^1 sur l'intervalle $I =]-\infty, 1[$, à valeurs réelles vérifiant les conditions initiales

$$x(0) = 1 \quad , \quad y(0) = 1$$

et le système différentiel :

$$\forall t \in I, \begin{cases} x'(t) &= -4x(t)^3 y(t)^3 \\ y'(t) &= 3x(t)^2 y(t)^4 \end{cases}$$

1. Soit $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

   $$\forall X, Y \in \mathbb{R},\ E(X, Y) = X^3 Y^4$$

   et e la fonction définie sur I par

   $$\forall t \in I,\ e(t) = E(x(t), y(t)).$$

   Montrer que la fonction e est constante sur I et donner la valeur de cette constante.
2. On pose $\mathcal{C} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2,\ E(X, Y) = 1\}$.
   (a) Représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{C}$.
   On pourra remarquer que $\mathcal{C}$ est la réunion de deux graphes d'équation type $Y = f_{\pm}(X), X \in]0, +\infty[$ ou que $\mathcal{C}$ est un seul graphe d'équation type $X = g(Y), Y \in \mathbb{R}^*$.
   (b) Montrer que $\{(x(t), y(t)),\ t \in I\} \subset \mathcal{C}$. A-t-on égalité ?
   (c) Que dire du signe des fonctions x et y ? De leur sens de variation ?
3. (a) En déduire que y est solution de l'équation différentielle

   $$\forall t \in I,\ y'(t) = 3y^{\frac{4}{3}}(t)$$

   et résoudre cette équation différentielle à variables séparées.
   (b) Donner une expression de $x(t)$ en fonction de $t \in I$.

Exercice 6. On considère un triplet de fonctions (x, y, z) de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} x' &= x + 4y - 4z \\ y' &= 3x + 2y - 4z \\ z' &= 3x - 3y + z. \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) &= 1 \\ y(0) &= 2 \\ z(0) &= 3. \end{cases}$$

On pose, pour tout réel t, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice A telle que : $\forall t \in I,\ X'(t) = AX(t)$.
2. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et déterminer son inverse.
   (b) Calculer $P^{-1}AP$. On notera D cette matrice
3. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y(t) = P^{-1}X(t)$.
   (a) Montrer que Y vérifie : $\forall t \in \mathbb{R},\ Y'(t) = DY(t)$.
   (b) En déduire $Y(t)$ puis $X(t)$. pour tout $t \in \mathbb{R}$

2 Dynamique de population

Exercice 7 (**Modèle de Gompertz**)**.** Soit P une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$\forall t \geq 0, \quad P'(t) = r \ln\left(\frac{\kappa}{P(t)}\right) P(t) \quad \text{et} \quad P(0) = P_0 > 0$$

où r et κ sont des constantes positives.
On admet que pour tout $t \geq 0$, $P(t) > 0$.

1. Montrer que $\dfrac{P'}{P}$ est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 à coefficient constant.
2. En déduire une expression de $P(t)$ en fonction de t.

Exercice 8 (**Modèle de Verhulst**)**.** On considère une fonction P définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant :

$$P'(t) = r\left(P(t) - \frac{P(t)^2}{\kappa}\right)$$

où r, κ sont des réels strictement positifs. On notera pour la suite $P_0 = P(0) \in]0, \kappa[$.

1. **Positivité :** le but de cette question est de montrer que pour tout $t \geq 0$, $P(t) \in]0, \kappa[$.
   (a) Soit $f : t \mapsto rP(t)\left(1 - \dfrac{P(t)}{\kappa}\right)$. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.
   (b) Montrer que $f(0) > 0$ et en déduire que pour tout $t \geq 0$, $f(t) > 0$.
   (c) En déduire que pour tout $t \geq 0$, $P(t) \in]0, \kappa[$.
2. **Résolution.**
   (a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0, \kappa\} \quad \frac{\kappa}{x(\kappa - x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{\kappa - x}.$$
   (b) Résoudre l'équation différentielle du modèle de Verhulst.

3 Preuve

Exercice 9. Le but de cet exercice est de démontrer la proposition du cours sur la résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 2 homogènes à coefficients constants.
Soit a, b deux réels et considérons l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0.$$

Soit y une solution de (E).

1. **Cas où l'équation caractéristique à deux solutions distinctes réelles** notées r_1 et r_2.
   (a) Exprimer $r_1 + r_2$ et $r_1 r_2$ en fonction de a et b.
   (b) Montrer que $y' - r_1 y$ est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 qu'on résoudra.

(c) En déduire qu'il existe un réel c tel que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) - r_1 y(t) = ce^{r_2 t}$. Résoudre cette équation

(d) En déduire qu'il existe des réels λ_1 et λ_2 tels que : $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}$.

(e) Résoudre (E) dans ce cas.

2. **Cas où l'équation caractéristique à une unique solution réelle** notée r_0.

   (a) Exprimer r_0 et r_0^2 en fonction de a et b.

   (b) Montrer que $z : t \mapsto e^{-r_0 t} y$ est solution de : $z'' = 0$.

   (c) En déduire qu'il existe des réels λ_1 et λ_2 tels que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t)e^{r_0 t}$.

   (d) Résoudre (E) dans ce cas.

3. **Cas où l'équation caractéristique à deux solutions complexes conjuguées** notées $\alpha \pm i\beta$.

   (a) En raisonnant comme en 1, montrer qu'il existe deux complexes λ_1 et λ_2 tels que : $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = e^{\alpha t}(\lambda_1 e^{i\beta t} + \lambda_2 e^{-i\beta t})$.

   (b) Montrer que $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$ et en déduire qu'il existe deux réels A, B tels que : $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$.

   (c) Résoudre (E) dans ce cas.