Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

Dm 1

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats, étapes importantes, ...doivent être mis en valeurs.

Exercice – Une fonction de deux variables

1. (a) On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = e^x - x - 1.$$

En tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = e^x - 1.$$

On en déduit :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

En particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \geq g(0) = 0$$

i.e

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x.$$

(b) En appliquant l'inégalité précédente à $x = \frac{a}{A} - 1$ on obtient :

$$\frac{a}{A} \leq e^{\frac{a}{A}-1}.$$

On admet que de même :

$$\frac{b}{A} \leq e^{\frac{b}{A}-1} \quad \text{et} \quad \frac{c}{A} \leq e^{\frac{c}{A}-1}.$$

(c) En multipliant membre à membre les inégalités ci-dessus, on obtient, puisque tous les termes sont positifs :

$$\frac{abc}{A^3} \leq e^{\frac{a}{A}-1}e^{\frac{b}{A}-1}e^{\frac{c}{A}-1} = e^{\frac{a+b+c}{A}-3}$$

i.e

$$\frac{G^3}{A^3} \leq e^{\frac{a+b+c}{A}-3}.$$

Or par définition de A, on sait que :

$$\frac{a+b+c}{A} = 3.$$

Ainsi on obtient :

$$\frac{G^3}{A^3} \leq e^{3-3} = 1.$$

Finalement, comme A^3 est positif et que la fonction racine cubique est croissante, on trouve :

$$G \leq A$$

ce qui est bien l'inégalité souhaitée.

2. **(a)** Les fonctions coordonnées sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[^2$. Ainsi :

- par produit $(x,y) \mapsto xy$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[^2$ et ne s'y annule pas
- donc par quotient, $(x,y) \mapsto \dfrac{1}{xy}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[^2$.

Finalement par somme, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[^2$. De plus pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \frac{1}{x^2 y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 - \frac{1}{y^2 x}.$$

(b) Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$. Alors :

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \frac{1}{x^2} \\ y^2 x & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 1 \\ x & = & 1 \end{array} \right.$$

Ainsi $(1,1)$ est l'unique point critique de f.

(c) Comme $]0,+\infty[^2$ est un ouvert, si f admet un extremum, c'est nécessairement en $(1,1)$.

Or $f(1,1) = 3$ et d'après la question 1 :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \quad \frac{f(x,y)}{3} = \frac{x+y+\frac{1}{xy}}{3} \geq \sqrt[3]{x \times y \times \frac{1}{xy}} = 1.$$

Ainsi :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \quad f(x,y) \geq 3 = f(1,1).$$

La fonction f admet donc un minimum global en $(1,1)$ qui vaut 3.

Problème – Intégrales de Wallis et intégrale de Gauss

Le but de cet exercice est de montrer que l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ est convergente et vaut $\sqrt{2\pi}$.

Intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt.$$

1. Soit $n \geq 0$. En effectuant le changement de variable $s = \dfrac{\pi}{2} - t$ on trouve :

$$\begin{aligned} W_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - s\right) \times (-1)ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - s\right) ds \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(s) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(s)\right)^n ds \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt. \end{aligned}$$

2. On a :

$$W_0 = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad W_1 = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n+1}(t) - \cos^n(t))dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)(\cos(t) - 1)dt. \end{aligned}$$

Or, sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction cosinus est positive et majorée par 1. L'intégrande est donc négatif d'où :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)(\cos(t) - 1)dt \leq 0.$$

Ainsi la suite (W_n) est décroissante.
Étant minorée (par 0) et décroissante, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, l'intégrande est positif et continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $W_n \neq 0$ car sinon, $\cos^n$ serait nul sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t)dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\cos^n(t)dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))\cos^n(t)dt \\ &= W_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin(t)\cos^n(t)dt. \end{aligned}$$

Or les fonctions $t \mapsto \sin(t)$ et $g : t \mapsto -\dfrac{\cos^{n+1}(t)}{n+1}$ sont de classe C^1 sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et on a pour tout $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$\sin'(t) = \cos(t) \quad ; \quad g'(t) = \sin(t)\cos^n(t).$$

Par intégration par parties, on obtient donc

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= W_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin(t)\cos^n(t)dt \\ &= W_n - \left(\left[-\frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1}\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{\cos^{n+1}(t)}{n+1}\cos(t)dt\right) \\ &= W_n - \frac{1}{n+1}W_{n+2}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\frac{n+2}{n+1}W_{n+2} = W_n \quad \text{ou encore} \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Compte tenu de la question précédente :

$$(n+2)W_{n+1}W_{n+2} = (n+2)W_{n+1}\frac{n+1}{n+2}W_n = (n+1)W_nW_{n+1}.$$

Ainsi la suite $((n+1)W_nW_{n+1})_n$ est constante. La valeur de la constante est obtenue en prenant la valeur en $n = 0$:

$$W_0W_1 = \frac{\pi}{2}.$$

7. **(a)** L'inégalité de droite est une conséquence immédiate de la décroissance prouvée à la question 3.
Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la question 5, on a :

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{W_{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}W_{n+2}} = \frac{n+1}{n+2}\frac{W_{n+1}}{W_{n+2}} \geq \frac{n+1}{n+2}$$

l'inégalité étant encore une conséquence de la décroissance de la suite.
Ainsi, on a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1.$$

(b) D'après l'encadrement précédent, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$

Ainsi : $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n+1}$.

8. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ (question 6) :

$$\frac{\pi}{2} = (n+1)W_nW_{n+1}.$$

Or avec la question précédente on sait que $(n+1)W_nW_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} nW_n^2$.

Ainsi :

$$nW_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

et finalement

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Quand n tend vers $+\infty$, W_n tend donc vers 0.

9. Montrons par récurrence que pour tout $p \geq 0$ on a :

$$\begin{cases} W_{2p} & = & \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \\ \\ W_{2p+1} & = & \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

— *Initialisation :* d'après la queston 2, $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = 1$ ce qui coïncide bien avec les formules données.

— *Hérédité :* soit $p \geq 0$. On suppose que

$$\begin{cases} W_{2p} & = & \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \\ \\ W_{2p+1} & = & \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

et on va montrer que :

$$\begin{cases} W_{2(p+1)} & = & \frac{\pi}{2} \times \frac{(2(p+1))!}{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2} \\ \\ W_{2(p+1)+1} & = & \frac{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}{(2(p+1)+1)!} \end{cases}$$

D'après la question 5, on a :

$$\begin{aligned}
W_{2(p+1)} = W_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p} \\
&= \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \quad \text{par HR} \\
&= \frac{(2p+2)(2p+1)}{(2p+2)^2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2p+2)!}{2^2(p+1)^2 2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{2} \times \frac{(2(p+1))!}{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}.
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
W_{2(p+1)+1} = W_{2p+3} &= \frac{2p+2}{2p+3} W_{2p+1} \\
&= \frac{2p+2}{2p+3} \times \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \quad \text{par HR} \\
&= \frac{(2p+2)^2}{(2p+3)(2p+2)} \times \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \\
&= \frac{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}{(2p+3)!}.
\end{aligned}$$

— *Conclusion :* par le principe de récurrence, on a bien montré que pour tout $p \geq 0$ on a :

$$\begin{cases} W_{2p} & = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \\ \\ W_{2p+1} & = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$$

Intégrale de Gauss

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

10. La fonction F est une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$ (continue sur $\mathbb{R}$. Elle est donc dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = e^{-x^2} > 0.$$

Ainsi F est strictement croissante.

11. Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a

$$x \leq x^2$$

donc en multipliant par -1 et en passant à l'exponentielle, croissante sur $\mathbb{R}$, on a

$$e^{-x^2} \leq e^{-x}.$$

12. On sait que :

$$\forall x \geq 1, \quad 0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

et l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ est convergente. En effet :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_1^A e^{-x}dx = \lim_{A\to+\infty}(e^{-1} - e^{-A}) = e^{-1}.$$

D'après le théorème de comparaison pour les intégrale de fonctions continues positives, on en déduit que $\displaystyle\int_1^A e^{-x^2}dx$ est convergente.

Par la relation de Chasles, on en déduit alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ converge également.

13. La fonction $f : u \mapsto u - \ln(1+u)$ est dérivable sur $]-1,+\infty$ et pour tout $u \in]-1,+\infty[$ on a :

$$f'(u) = 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{u}{1+u}$$

est de même signe que u. Ainsi :

x	-1		0		$+\infty$
Signe de $f'(u)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi, pour tout $u > -1$, $f(u) \geq 0$ c'est-à-dire

$$\forall u \in]-1,+\infty[, \quad \ln(1+u) \leq u.$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Pour tout $x \in [0, \sqrt{n}[$, on a $\dfrac{x^2}{n} \in]-1, 0]$ donc d'après la question précédente :

$$\ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leq -\frac{x^2}{n}$$

c'est-à-dire

$$n\ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \leq -x^2.$$

En passant à l'exponentielle (croissante) puis un intégrant entre 0 et $\sqrt{n}$ on obtient, par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_0^{\sqrt{n}} e^{n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx.$$

(b) La fonction $f : u \mapsto \sqrt{n}\cos(u)$ est de classe C^1 et strictement monotone sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[0, \sqrt{n}\right]$. D'après la formule de changement de variable on sait donc que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{f(0)} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(1 - \cos^2(u)\right)^n (-\sqrt{n}\sin(t))dt.$$

Ainsi :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2(u)\right)^n \sin(u)du = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)du$$

car $1 - \cos^2(u) = \sin^2(u)$.
On reconnaît donc $\sqrt{n}W_{2n+1}$ grâce à la question 1 et la question précédente permet de conclure que :

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx.$$

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\frac{t^2}{n} \geq 0$ donc d'après la question 13, on sait que :

$$\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n}.$$

D'où, en multipliant membre à membre par $-n$:

$$-n\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \geq -t^2.$$

En passant à l'exponentielle, strictement croissante, on obtient alors :

$$e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

(b) La fonction $f : u \mapsto \sqrt{n}\tan(u)$ est de classe C^1 et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et $f\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[0, \sqrt{n}\right]$. D'après la formule de changement de variable on sait donc que :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx &= \int_{f(0)}^{f\left(\frac{\pi}{4}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \frac{f(u)^2}{n}\right)^{-n} f'(u)du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2(u)\right)^{-n} \sqrt{n}(1 + \tan^2(u)du \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2(u)\right)^{-n+1} du \\
&= \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} du
\end{aligned}$$

car $\tan^2(u) + 1 = \dfrac{1}{\cos^2(u)}$.

Ainsi en prenant $B = \dfrac{\pi}{4}$ et $p = n - 1$, on a montré que :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n} \int_0^B \cos^{2p}(t)dt.$$

(c) On effectue le changement de variable $t = \dfrac{\pi}{2} - s$. On a alors :

$$\int_0^B \cos^{2p}(t)dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-B} \cos^{2p}\left(\frac{\pi}{2} - s\right) ds.$$

Or, on a vu à la question 1 que $\cos^{2p}\left(\dfrac{\pi}{2} - s\right) = \sin^{2p}(s)$ donc (en remettant les bornes dans le bon sens avec le signe $-$) :

$$\int_0^B \cos^{2p}(t)dt = \int_{\frac{\pi}{2}-B}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}(t)dt.$$

(d) Avec la question 15.(a) et la croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt.$$

Avec les questions 15.(b) et 15.(c) on déduit donc :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} \int_{\frac{\pi}{2}-B}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}(t)dt = \sqrt{n} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(t)dt.$$

Or, la fonction sinus étant positive sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, on a :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(t)dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(t)dt.$$

Finalement, on obtient donc :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}(t)dt = \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

16. D'après les questions 14.(b) et 15.(d), on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \sqrt{n} W_{2n-2}.$$

Or, d'après la question 8, on sait que $W_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

En particulier :

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et de même

$$\sqrt{n}W_{2n-2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

D'après le théorème des gendarmes et la question 12, on en déduit donc que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

17. Le changement de variable $x = -t$, montre que (l'intégrande est paire !) :

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

L'intégrale doublement généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est donc convergente et vaut $\sqrt{\pi}$.

En effectuant le changement de variable $x = \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ dans cette intégrale on trouve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}dt.$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{2\pi}.$$