Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD3

Polynômes

1 Polynômes, degrés

Exercice 1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels λ, μ afin que $X^4 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 12X + 4$ soit le carré d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2.

1. Soient $U, V \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $U + V$ et $U - V$ sont constants si et seulement si U et V le sont.
2. On suppose $U^2 - V^2$ constant et non nul.
   (a) Montrer que U et V sont constants.
   (b) Dire pourquoi $U^2 - V^2 = 0$ n'implique pas que U et V sont constants.

Exercice 3. Déterminer le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus 3 tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 0$, $P(-1) = -2$ et $P(2) = 4$.

Exercice 4. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Déterminer le degré et le coefficient dominant de

$$P(X + 1) - P(X).$$

2 Racines et factorisation

Exercice 5. Soit $P(X) = 2X^3 - 6X + 1$.

Montrer que le polynôme P admet trois racines réelles distinctes. Notons-les α, β et γ.

Calculer $\alpha + \beta + \gamma$ et $\alpha\beta\gamma$.

Exercice 6.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 8i$ (donner l'expression exponentielle et algébrique des solutions).
2. Soient $P_1(X) = X^3 - 8i$ et $P_2(X) = X^3 + 8i$. Montrer que $-z$ est racine de P_2 si et seulement si z est racine de P_1.
3. En déduire les racines du polynôme $P(X) = X^6 + 64$.
4. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si α est une racine de P de multiplicité au moins 2 alors $P'(\alpha) = 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = 1 + \dfrac{X}{1!} + \dfrac{X^2}{2!} + \cdots + \dfrac{X^n}{n!}$ n'a que des racines simples.

Exercice 8. On considère la famille de polynômes définie pas récurrence par

$$P_0 = 2 \quad ; \quad P_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

1. Calculer P_2 et P_3. Déterminer degré et coefficient dominant de P_n pour tout n.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a $P_n(z+z^{-1}) = z^n+z^{-n}$. En déduire une expression simple pour $P_n(2\cos\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer les racines de P_n.

Exercice 9. Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$ et on pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Calculer $1 + j + j^2$. Que dire de j^3 ? Montrer que $j^2 = \bar{j}$.
2. Montrer que P est divisible par $(X-j)^2$ et $(X-\bar{j})^2$.
3. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.