Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD3

Polynômes

1 Polynômes, degrés

Correction de l'exercice 1.
Condition nécessaire. Comme $P = X^4 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 12X + 4$ est unitaire, si P est un carré, c'est le carré d'un polynôme unitaire, c'est-à-dire de la forme $X^2 + bX + c$. L'égalité

$$X^4 + \lambda X^3 + \mu X^2 + 12X + 4 = (X^2 + bX + c)^2 = X^4 + 2bX^3 + (2c + b^2)X^2 + 2bcX + c^2,$$

donne le système suivant :

$$\begin{cases} \lambda = 2b \\ \mu = 2c + b^2 \\ 12 = 2bc \\ 4 = c^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} c = 2 \\ b = 3 \\ \lambda = 6 \\ \mu = 13 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} c = -2 \\ b = -3 \\ \lambda = -6 \\ \mu = 5 \end{cases}$$

Donc une condition nécessaire est

$$P \in \{X^4 + 6X^3 + 13X^2 + 12X + 4, X^4 - 6X^3 + 5X^2 + 12X + 4\}.$$

Condition suffisante. Réciproquement, si

$$P \in \{X^4 + 6X^3 + 13X^2 + 12X + 4, X^4 - 6X^3 + 5X^2 + 12X + 4\}$$

alors P est un carré car, par ce qui précède,

$$X^4 + 6X^3 + 13X^2 + 12X + 4 = (X^2 + 3X + 2)^2 \text{ et } X^4 - 6X^3 + 5X^2 + 12X + 4 = (X^2 - 3X + 2)^2.$$

Correction de l'exercice 2.

1. Soient $U, V \in \mathbb{K}[X]$.
   Supposons que $U + V$ et $U - V$ sont constants. Alors $2U = (U + V) + (U - V)$ et $2V = (U + V) - (U - V)$ sont constants donc U et V aussi. Réciproquement, si U et V sont constants alors $U + V$ et $U - V$ le sont aussi (on peut le voir directement ou utiliser l'inégalité sur le degré d'une somme).

2. (a) On suppose maintenant que $U^2 - V^2$ est constant et non nul (en particulier, son degré est zéro). Comme $U^2 - V^2 = (U + V)(U - V)$, on a

   $$\deg(U + V) + \deg(U - V) = \deg(U^2 - V^2) = 0.$$

   Cela implique que $\deg(U + V)$ et $\deg(U - V)$ valent zéro, c'est-à-dire que $U + V$ et $U - V$ sont constants.
   Par ce qui précède, cela implique que U et V sont constants.

   (b) En prenant $U + V = X$ on voit que l'hypothèse $U^2 - V^2$ non nul est nécessaire.

Correction de l'exercice 3. Puisque $P(1) = 0$, 1 est une racine de P donc P s'écrit sous la forme $P = (X-1)(a_2X^2 + a_1X + a_0)$, où $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.
Par ailleurs, les conditions $P(0) = 1$, $P(-1) = -2$ et $P(2) = 4$ donnent le système suivant :

$$\begin{cases} a_0 = -1 \\ a_2 - a_1 + a_0 = 1 \\ 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -1 \\ a_2 = 2 + a_1 \\ 4(2+a_1) + 2a_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -1 \\ a_1 = -\dfrac{1}{2} \\ a_2 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Donc $P = \dfrac{1}{2}(X-1)(3X^2 - X - 2)$.

Correction de l'exercice 4.

— Si $\deg(P) \leq 0$ (c'est-à-dire si P est constant) alors $P(X+1) - P(X)$ est le polynôme nul.

— Si $\deg(P) \geq 1$ alors, en notant $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n \neq 0$, on a :

$$P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left((X+1)^k - X^k\right).$$

Or pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$(X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} k \binom{k}{i} X^i.$$

Ainsi $(X+1)^k - X^k$ est de degré $n-1$ et de coefficient dominant $\dbinom{k}{k-1}$.

Par suite $P(X+1) - P(X)$ est de degré $n-1$ et de coefficient dominant $a_n \dbinom{n}{n-1}$.

2 Racines et factorisation

Correction de l'exercice 5. Soit $P\colon x \longmapsto 2x^3 - 6x + 1$.

1. On étudie $P : x \mapsto P(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.
   On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x-1)(x+1).$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
P	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$, P est strictement monotone et continue. Donc d'après le théorème de la bijection, P réalise une bijection en restriction à chacun de ces intervalles.

Comme 0 appartient à $P(]-\infty,-1[)$, $P(]-1,1[)$ et $P(]1,+\infty[)$, on en déduit que P possède une racine $\alpha \in]-\infty,-1[$, $\beta \in]-1,1[$ et $\gamma \in]1,+\infty[$.

2. On sait donc que :
$$P = (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)Q$$
où Q est un polynôme. Pour des raisons de degré, Q est de degré 1 et, en considérant le coefficient dominant on trouve que $Q = 2$:
$$P = 2(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma).$$
En comparant le terme constant du membre de gauche et de droite on trouve :
$$-2\alpha\beta\gamma = 1 \quad i.e. \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{1}{2}.$$
En comparant le terme en X^2 du membre de gauche et de droite on trouve :
$$-2(\alpha+\beta+\gamma)0 = \quad i.e. \quad \alpha+\beta+\gamma = 0.$$

Correction de l'exercice 6.

1. En passant sous forme exponentielle : $z = re^{i\theta}$ où $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Donc :
$$\begin{aligned} z^3 = 8i &\iff (re^{i\theta})^3 = 8e^{i\pi/2} \\ &\iff r = 2 \quad \text{et} \quad \theta = \pi/6,\ 5\pi/6 \text{ ou } 3\pi/2. \end{aligned}$$
Donc $z \in \{2e^{i\pi/6}, 2e^{5i\pi/6}, 2e^{3i\pi/2}\} = \{\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}+i, -2i\}$.
2. On a $P_1(z) = 0 \iff z^3 = 8i$.
Or $(-z)^3 = -z^3$ donc :
$$P_1(z) = 0 \iff z^3 = 8i \iff (-z)^3 = -8i \iff (-z)^3 + 8i = 0 \iff P_2(-z) = 0.$$
3. On pose $Z = X^3$.
$$P(X) = 0 \iff Z^2 + 64 = 0 \iff Z^2 = -64 \iff Z = \pm 8i.$$
Donc les racines de $P(X)$ sont les racines de $P_1(X)$ et les racines de $P_2(X)$, donc l'ensemble des racines est :
$$\{2e^{i\pi/6}, 2e^{5i\pi/6}, 2e^{3i\pi/2}, 2e^{7i\pi/6}, 2e^{11i\pi/6}, 2e^{i\pi/2}\} = \{\sqrt{3}+i, -\sqrt{3}+i, -2i, -\sqrt{3}-i, \sqrt{3}-i, 2i\}.$$
4. Dans $\mathbb{C}[X]$: $P(X) = (X-\sqrt{3}-i)(X-\sqrt{3}+i)(X+\sqrt{3}-i)(X+\sqrt{3}+i)(X+2i)(X-2i)$
Dans $\mathbb{R}[X]$: $P(X) = (X^2 - 2\sqrt{3}X + 4)(X^2 + 2\sqrt{3}X + 4)(X^2+4)$.

Correction de l'exercice 7.

1. Si α est une racine de multiplicité au moins 2 de P alors il existe Q tel que :
$$P = (X-\alpha)^2 Q.$$
Donc :
$$P' = 2(X-\alpha)Q + (X-\alpha)^2 Q'$$
et donc $P'(\alpha) = 0$.

2. Soit $P = 1 + \dfrac{X}{1!} + \dfrac{X^2}{2!} + \cdots + \dfrac{X^n}{n!}$ et supposons que P possède une racine a de multiplicité ≥ 2. Alors, $P(a) = P'(a) = 0$. Or,
$$P' = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} X^k = P - \frac{1}{n!} X^n.$$
Du coup, cela entraîne que $\dfrac{1}{n!} a^n = 0$ donc que $a = 0$. C'est une contradiction car 0 n'est visiblement pas une racine de P. Ainsi, P ne possède pas de racine multiple.

Correction de l'exercice 8. On considère la famille de polynômes définie pas récurrence par
$$P_0 = 2 \quad ; \quad P_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, \quad P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$

1. On a :
$$P_2 = XP_1 + P_0 = X^2 - 2 \quad \text{et} \quad P_3 = XP_2 - P_1 = X^3 - 3X.$$
Par récurrence, montrons que P_n est de degré n et de coefficient dominant égal à 1.
   - *Initialisation :* ok.
   - *Hérédité :* soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose le résultat acquis aux rangs n et $n+1$. Montrons qu'il est vrai au rang $n+2$. On sait que :
   $$P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n.$$
   Donc le monôme dominant de P_{n+2} est celui de XP_{n+1} c'est-à-dire X^{n+2}. Le résultat est donc acquis au rang $n+2$.
   - *Conclusion :* par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unitaire de degré n.
2. Par récurrence, montrons que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a $P_n(z + z^{-1}) = z^n + z^{-n}$.
   - *Initialisation :* ok pour $n = 0$ et $n = 1$.
   - *Hérédité :* soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose le résultat acquis aux rangs n et $n+1$. Montrons qu'il est vrai au rang $n+2$. On sait que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:
   $$\begin{aligned} P_{n+2}(z + z^{-1}) &= (z + z^{-1})P_{n+1}(z + z^{-1}) - P_n(z + z^{-1}) \\ &= (z + z^{-1})(z^{n+1} + z^{-(n+1)}) - (z^n + z^{-n}) \\ &= z^{n+2} + z^{-n} + z^n + z^{-(n+2)} - (z^n + z^{-n}) \\ &= z^{n+2} + z^{-(n+2)}. \end{aligned}$$
   Donc le résultat est donc acquis au rang $n+2$.
   - *Conclusion :* par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on a $P_n(z + z^{-1}) = z^n + z^{-n}$

   Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On sait que $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$ donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(2\cos\theta) = P_n(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = e^{in\theta} + e^{-in\theta} = 2\cos(n\theta).$$
3. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose $\theta_k = \dfrac{\pi + 2k\pi}{2n}$. Alors :
$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad P_n(2\cos(\theta_k)) = 2\cos(n\theta_k) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0.$$
Or, les $2\cos(\theta_k)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ sont deux à deux distincts donc on a ainsi trouvé n racines distinctes de P_n.
Comme P_n est de degré n ce sont les seules.

Correction de l'exercice 9. Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$ et on pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison j :
$$1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j}.$$
Or $j^3 = e^{i2\pi} = 1$ donc :
$$1 + j + j^2 = 0.$$
Enfin :
$$\overline{j} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}+6\pi} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = j^2.$$
2. Par le binôme de Newton :
$$P = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} X^k - X^7 - 1 = \sum_{k=1}^{6} \binom{7}{k} X^k.$$
3. Il s'agit de montrer que j et $\overline{j}$ sont racines de multiplicité au moins 2 de P.
$$\begin{aligned} P(j) = (j+1)^7 - j^7 - 1 = (-j^2)^7 - j^7 - 1 &= -j^{14} - j^7 - 1 \\ &= -e^{i\frac{28\pi}{3}} - e^{i\frac{14\pi}{3}} - 1 \\ &= -e^{i\frac{4\pi}{3}+6i\pi} - e^{i\frac{2\pi}{3}+4i\pi} - 1 \\ &= -j^2 - j - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} P'(j) = 7(j+1)^6 - 7j^6 &= 7((-j^2)^6 - j^6) \\ &= 7(e^{i\frac{24\pi}{3}} - e^{i\frac{12\pi}{3}}) \\ &= 7(1-1) \\ &= 0. \end{aligned}$$
Par ailleurs, P et P' sont à coefficients réels donc $\overline{j}$ est aussi racine de P et P'. Donc j et $\overline{j}$ sont racines de multiplicité au moins 2 de P et ainsi P est divisible par $(X-j)^2$ et $(X-\bar{j})^2$.
4. D'après la question précédente :
$$P = (X-j)^2(X-\bar{j})^2 Q$$
où $Q \in \mathbb{C}[X]$ est de degré 2 car d'après la question 2, $\deg(P) = 6$.
Or, il est clair que 0 et -1 sont des racines de P, d'où finalement en regardant le coefficient dominant :
$$P = 7(X-j)^2(X-\bar{j})^2 X(X+1).$$
Pour factoriser dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les paires de racines complexes conjuguées :
$$\begin{aligned} P = 7(X-j)^2(X-\bar{j})^2 X(X+1) &= ((X-j)(X-\bar{j}))^2 X(X+1) \\ &= (X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) X + 1)X(X+1) \\ &= (X^2 + X + 1)(X+1)X. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10.

1. Posons $P = 4X^3 - 16X^2 - 19X - 5$. On sait qu'il existe deux complexes a et b tels que :
$$P = 4(X-a)^2(X-b) = 4(X^2 - 2aX + a^2)(X-b).$$
En identifiant les coefficients de chaque degré on trouve :
$$-4a^2b = -5 \quad ; \quad 4(2ab + a^2) = -19 \quad ; \quad 4(-b-2a) = -16.$$
On en déduit :
$$b = 4 - 2a \quad ; \quad -4a^2(4-2a) = -5 \quad ; \quad 4(2a(4-2a) + a^2) = -19.$$
On a donc : $-3a^2 + 8a + \dfrac{19}{4} = 0$. Or le discriminant : $= 64 + 3 \times 19 = 121 = 11^2$.
On a donc :
$$a = \frac{-8+11}{-6} = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad a = \frac{-8-11}{-6} = \frac{19}{6}.$$
On vérifie alors que $P\left(\dfrac{19}{6}\right) \neq 0$. Ainsi $a = -\dfrac{1}{2}$.
On déduit enfin que $b = 4 - 2a = 5$.
2. On remarque que -1 est racine évidente de R. Par identification on trouve :
$$R = (X+1)(X^2 - 8X + 15).$$
Il est facile de voir que les racines de $X^2 - 8X + 15$ sont 3 et 5 donc :
$$R = (X+1)(X-3)(X-5).$$
D'après l'énoncé, -1, 3 ou 5 est racine de Q. En testant on voit que seul 3 l'est :
$$Q = (X-3)(aX^2 + bX + c).$$
Par identification, on trouve $a = 1$, $c = 8$ puis $-3b + c = 26$ donc $b = -6$. Finalement :
$$Q = (X-3)(X^2 - 6X + 8).$$
Enfin on vérifie facilement que les racines de $X^2 - 6X + 8$ sont 2 et 4 :
$$Q = (X-3)(X-2)(X-4).$$