Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DS2- 3h30

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Problème 1

Partie 1– Une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel k, on pose :

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt.$$

1. Justifier que I_0, I_1 sont des intégrales convergentes et donner leur valeur.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. On note f_k la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad f_k(t) = t^{k+2} e^{-t}.$$

(a) Dresser le tableau de variation de f_k.

(b) En déduire qu'il existe une constante M_k (que l'on explicitera) telle que :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad t^k e^{-t} \leq \frac{M_k}{t^2}.$$

(c) En déduire la nature de I_k.

3. **(a)** Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_{k+1} = (k+1) I_k$.

(b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = k!$.

4. Pour tout k entier naturel, on pose

$$J_k = \int_0^1 (-\ln(x))^k dx.$$

Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, J_k converge et déterminer sa valeur .
Indication : on pourra effectuer le changement de variable $x = e^{-t}$.

Partie 2– Une fonction de deux variables

On considère, pour tout la suite, la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=\int_0^{+\infty}(y+xt+t^2)^2e^{-t}dt$$

5. Déduire des questions précédentes que, pour tout couple (x,y) de réels, $f(x,y)$ est bien définie, c'est-à-dire que $\displaystyle\int_0^{+\infty}(y+xt+t^2)^2e^{-t}dt$ est une intégrale convergente.

6. **(a)** Vérifier que l'on a : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=2x^2+y^2+12x+4y+2xy+24.$

(b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

7. **(a)** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

(b) Déterminer le seul point critique (a,b) de f.

8. Le but de cette question est de montrer que f admet un extremum global en (a,b).

(a) Compléter le membre de droite de l'égalité suivante :

$$2x^2+2xy+12x=2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2-\dots$$

(b) Compléter de même l'égalité : $\dfrac{y^2}{2}-2y+6=\dfrac{1}{2}(y-2)^2+\dots$

(c) En déduire une autre écriture de $f(x,y)$ montrant que f admet un extremum global en (a,b).

Problème 2

Partie 1–Préliminaires

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\quad f(x)=x-\ln(x).$$

1. Étudier les variations de f. On dressera le tableau de variation avec les limites aux bords.

2. En déduire que pour tout $a,b,c,d,x,y\in\mathbb{R}_+^*$ on a :

$$a\left(\ln\left(\frac{by}{a}\right)-\frac{by}{a}+1\right)\leq d\left(-\ln\left(\frac{cx}{d}\right)+\frac{cx}{d}-1\right).$$

Partie 2– Étude d'une suite définie implicitement

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$.
   On note u_n cette solution et on s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. Déterminer u_1.
5. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
6. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite (finie ou infinie) quand n tend vers $+\infty$ puis déterminer cette limite.
7. Montrer que $u_n = n + \underset{n\to+\infty}{o}(n)$.
   Indication : on pourra commencer par montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.
8. Montrer que $u_n = n + \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

Partie 3– Étude d'un système différentiel

Soit a, b, c, d des réels strictement positifs.
On considère le système différentiel ci-dessous où x et y désignent respectivement l'effectif d'une population de bactéries et l'effectif d'une population de protozoaires en fonction de $t \in \mathbb{R}_+$.
Enfin, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ désigne les effectifs relevés à un instant $t_0 \in \mathbb{R}_+$.
On admet, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}_+$ et tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ l'**existence d'un unique couple** (x, y) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$(S) \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \begin{cases} x'(t) &= (a - by(t))x(t) \\ y'(t) &= (cx(t) - d)y(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

9. Soient $t_0 \in \mathbb{R}_+$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Dans cette question uniquement, on suppose $x_0 = 0$.
   Démontrer qu'alors :
   $$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad x(t) = 0 \quad \text{et} \quad y(t) = y_0 e^{-d(t-t_0)}.$$
   (b) Quel est l'unique couple solution si $y_0 = 0$?
   (c) Pour quelles conditions initiales x_0 et y_0 les solutions sont-elles constantes (c'est-à-dire pour lesquelles x et y sont deux fonctions constantes indépendantes du temps) ?
10. On suppose dorénavant que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.
   (a) À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, démontrer que si (x, y) est solution de (S) alors ni x ni y ne s'annulent.
   (b) En déduire que si (x, y) est solution de (S) alors x et y sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
11. On note $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par :
   $$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \varphi(x, y) = cx - d\ln(x) + by - a\ln(y).$$
   On admet que φ est de classe C^1 et qu'elle admet au moins un extremum.

(a) Calculer les dérivées partielles premières de φ.

(b) En déduire le(s) point(s) critique(s).

(c) À l'aide de la première partie, montrer que φ possède un extremum global.

12. Démontrer que si (x, y) est un couple solution de (S) avec $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ alors $t \mapsto \varphi(x(t), y(t))$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$.

13. Dans cette question, on met en place une résolution numérique de (S) sur un intervalle $[0, T]$ $(T > 0)$ avec la méthode d'Euler. On se fixe un nombre de subdivisions $n \in \mathbb{N}^*$ et, à partir de la condition initiale $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on construit deux suites $(x_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ et $(y_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ définie par :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & x_k + \dfrac{T}{n} x_k(a - by_k) \\ \\ y_{k+1} & = & y_k + \dfrac{T}{n} y_k(cx_k - d) \end{array} \right.$$

(a) On considère la fonction suivante où les arguments `x0`, `y0`, `T` et `n` définissent respectivement x_0, y_0, l'intervalle d'étude $[0, T]$ et le nombre n de subdivisions de la méthode d'Euler (on suppose que les variables a, b, c, d sont déjà définies) :

```python
def resol(x0,y0,T,n):
        x = x0 ; y = y0
        t = 0
        Lx = [x]
        Ly = [y]
        Lt = [t]
        for k in range(# A COMPLETER ):
                #LIGNE(S) A COMPLETER
        return [Lt,Lx,Ly]
```

Compléter les lignes manquantes afin que les listes `Lx` et `Ly` contiennent respectivement $(x_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ et $(y_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ et que la liste `Lt` contienne $\left(k\dfrac{T}{n}\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$.

(b) On ajoute au code précédent :

```python
x0 = 1; y0= 0.5 ; T = 20 ; n = 2000

def trace_pop():
        L = resol(x0,y0,T,n)
        plt.plot(L[0],L[1])
        plt.plot(L[0],L[2])
        plt.show()
```

Expliquer à quoi correspond chaque ligne de la fonction `trace_pop` en fonction des $(x_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ et $(y_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$.

(c) L'exécution de `trace_pop` donne la figure 1 suivante. Identifier (en expliquant) chaque courbe.

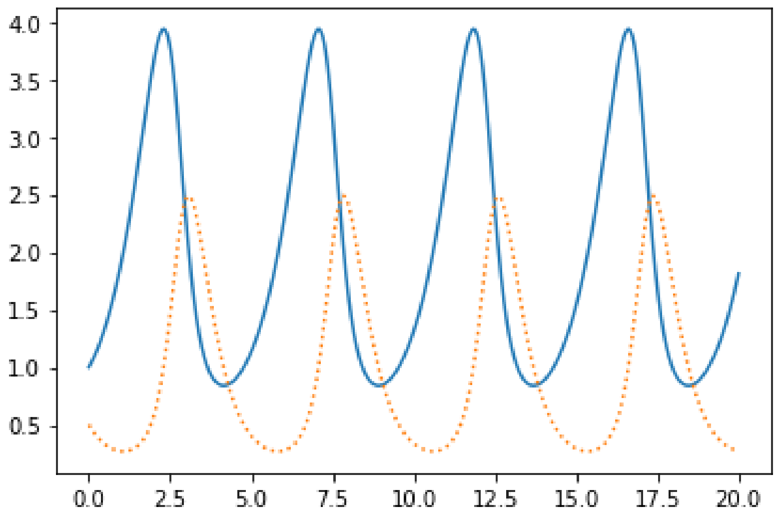

Figure 1 – Tracé donné par `trace_pop`