Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

**BCPST2 – Mathématiques**

# DS2- Correction

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Il ne doivent faire usage d'aucun document. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
*Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.*

## Problème 1

### Partie 1– Une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $k$, on pose :

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt.$$

**1.** Les fonctions $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto te^{-t}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ donc les intégrales $I_0$ et $I_1$ sont généralisées en $+\infty$.
Soit $A \in [0, +\infty[$. On a :

$$\int_0^A e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^A = -e^{-A} + 1.$$

Donc : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-t} dt = 1$.
Ainsi $I_0$ converge et vaut 1.
Les fonctions $t \mapsto -e^{-t}$ et $t \mapsto t$ sont de classe $C^1$ sur $[0, A]$ donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^A te^{-t} dt &= [-te^{-t}]_0^A - \int_0^A (-e^{-t}) dt \\ &= -Ae^{-A} + \int_0^A (e^{-t}) dt.\end{aligned}$$

Donc par croissance comparée et ce qui précède : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A te^{-t} dt = 1$.
Ainsi $I_1$ converge et vaut 1.

**2.** Soit $k \in \mathbb{N}$. On note $f_k$ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall t \in [0,+\infty[, \quad f_k(t) = t^{k+2}e^{-t}.$$

**(a)** La fonction $f_k$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et on a :

$$\forall t \geq 0, \quad f_k'(t) = e^{-t}t^{k+1}((k+2)-t).$$

On en déduit :

| $t$ | $0$ | | $k+2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_k'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_k$ | $0$ | $\nearrow$ | $M_k$ | $\searrow$ | $0$ |

où $M_k = f_k(k+2) = (k+2)^{k+2}e^{-(k+2)}$.

**(b)** D'après la question précédente :

$$\forall t \in ]0,+\infty[, \quad t^k e^{-t} \leq \frac{M_k}{t^2}.$$

**(c)** La fonction $t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. D'après la question précédente :

$$\forall t \in ]0,+\infty[, \quad t^k e^{-t} \leq \frac{M_k}{t^2}.$$

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{M_k}{t^2}dt$ est doublement généralisée (et divergente !), on ne va pas travailler directement sur $[0,+\infty[$ mais sur $[1,+\infty[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{M_k}{t^2}dt$ est convergente et l'intégrande est continue positif sur $[1,+\infty[$. Donc, par comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives, on peut conclure que

$$\int_1^{+\infty} t^k e^{-t}dt \qquad \text{converge.}$$

Par ailleurs, $\displaystyle\int_0^1 t^k e^{-t}dt$ n'est pas généralisée donc par Chasles, on en déduit que

$$I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt \qquad \text{converge.}$$

**3.** **(a)** Soit $k \in \mathbb{N}$. Les fonctions $t \mapsto t^{k+1}$ et $t \mapsto -e^{-t}$ sont de classe $C^1$ sur $[0,+\infty[$, $I_k$ et $I_{k+1}$ convergent et par croissance comparée :

$$\lim_{t \to +\infty} -e^{-t}t^{k+1} = 0.$$

Ainsi d'après la formule d'intégration par partie pour les intégrales généralisées :

$$I_{k+1} = [-t^{k+1}e^{-t}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -(k+1)t^k e^{-t}dt = (k+1)I_k.$$

**(b)** Cela se montre par récurrence :
$I_0 = 1 = 0!$ et si $I_k = k!$ alors $I_{k+1} = (k+1)I_k = (k+1)k! = (k+1)!$.

**4.** Pour tout $k$ entier naturel, on pose

$$J_k = \int_0^1 (-\ln(x))^k dx.$$

**(a)** Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction $x : t \mapsto e^{-t}$ est de classe $C^1$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. D'après la formule du changement de variable, les intégrales

$$-J_k = \int_1^0 (-\ln(x))^k dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} (-\ln(x(t)))^k x'(t) dt$$

sont de même nature et égale en cas de converge. Or

$$-\int_0^{+\infty} (-\ln(x(t)))^k x'(t) dt = -\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt - I_k.$$

Ainsi $J_k$ converge et est égale à $I_k$.

**(b)** Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J_k = k!$.

## Partie 2– Une fonction de deux variables

On considère, pour tout la suite, la fonction $f$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \int_0^{+\infty} (y + xt + t^2)^2 e^{-t} dt$$

**1.** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a pour tout $t \in [0, +\infty[$ :

$$\begin{aligned}(y + xt + t^2)^2 e^{-t} &= (y^2 + x^2t^2 + t^4 + 2xyt + 2xt^3 + 2yt^2)e^{-t} \\ &= y^2e^{-t} + 2xyte^{-t} + (x^2 + 2y)t^2e^{-t} + 2xt^3e^{-t} + t^4e^{-t}.\end{aligned}$$

Ainsi par linéarité de l'intégrale, comme $I_0$, $I_1$,...,$I_4$ converge, $f(x, y)$ définie bien une intégrale convergente.

**2.** **(a)** La linéarité de l'intégrale donne aussi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned}f(x, y) &= y^2 I_0 + 2xyI_1 + (x^2 + 2y)I_2 + 2xI_3 + I_4 \\ &= y^2 + 2xy + 2x^2 + 4y + 12x + 24.\end{aligned}$$

**(b)** D'après la question précédente, $f$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

**3.** **(a)** Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x + 12 + 2y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + 4 + 2x.$$

**(b)** Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x+12+2y & = & 0 \\ 2y+4+2x & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x+12+2y & = & 0 \\ -8-2x & = & 0 \end{cases} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1)$$

$$\iff \begin{cases} y & = & 2 \\ x & = & -4 \end{cases}$$

Ainsi $(-4,2)$ est le seul point critique $(a,b)$ de $f$.

**4.** Le but de cette question est de montrer que $f$ admet un extremum global en $(a,b)$.

**(a)** Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned} 2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2 &= 2\left(x^2+\frac{y^2}{4}+9+xy+6x+3y\right) \\ &= 2x^2+2xy+12x+2\left(\frac{y^2}{4}+9+3y\right) \end{aligned}$$

donc

$$2x^2+2xy+12x = 2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2 - 2\left(\frac{y^2}{4}+9+3y\right).$$

**(b)** On a, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\frac{1}{2}(y-2)^2 = \frac{y^2}{2} - 2y + 2$$

donc

$$\frac{y^2}{2} - 2y + 6 = \frac{1}{2}(y-2)^2 + 4.$$

**(c)** Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a donc :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= y^2+4y+24+2xy+2x^2+12x \\ &= y^2+4y+24+2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2 - 2\left(\frac{y^2}{4}+9+3y\right) \\ &= y^2+4y+24+2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2 - \frac{y^2}{2} - 18 - 6y \\ &= \frac{y^2}{2} - 2y + 6 + 2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}(y-2)^2 + 4 + 2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \geq 4.$$

Or, on vérifie facilement que :

$$f(-4,2) = 4.$$

D'où

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) \geq f(-4,2).$$

La fonction $f$ admet donc un minimum global en $(-4,2)$.

# Problème 2

## Partie 1–Préliminaires

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x - \ln(x).$$

**1.** La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

On en déduit :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

La limite en 0 ne présente pas de difficulté et la limite en $+\infty$ est une conséquence des croissances comparées car pour tout $x > 0$

$$f(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

**2.** D'après la question précédente, on a, pour tout $a, b, c, d, x, y \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$f\left(\frac{by}{a}\right) = \frac{by}{a} - \ln\left(\frac{by}{a}\right) \geq 1 \quad \text{donc} \quad \ln\left(\frac{by}{a}\right) - \frac{by}{a} + 1 \leq 0$$

et de même :

$$f\left(\frac{cx}{d}\right) = \frac{cx}{d} - \ln\left(\frac{cx}{d}\right) \geq 1 \quad \text{donc} \quad -\ln\left(\frac{cx}{d}\right) + \frac{cx}{d} - 1 \geq 0.$$

Ainsi, on a bien pour tout $a, b, c, d, x, y \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$a\left(\ln\left(\frac{by}{a}\right) - \frac{by}{a} + 1\right) \leq d\left(-\ln\left(\frac{cx}{d}\right) + \frac{cx}{d} - 1\right)$$

car le membre de gauche est négatif et le membre de droite positif.

## Partie 2– Étude d'une suite définie implicitement

**3.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 1, $f$ est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et $f([1,+\infty[) = [1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection continue, $f$ réalise donc une bijection de $[1,+\infty[$ dans $[1,+\infty[$.

Comme $n \in [1,+\infty[$, l'équation $f(x) = n$ admet donc une unique solution dans $[1,+\infty[$.

On note $u_n$ cette solution et on s'intéresse à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

**4.** On a $f(1) = 1$ donc par unicité $u_1 = 1$.

**5.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La bijection réciproque $g$ de $f$ sur $[1,+\infty[$ est strictement croissante (d'après le théorème de la bijection) et on a :

$$f(u_n) = n \leq n+1 = f(u_{n+1}).$$

Donc :

$$u_n = g(n) \leq g(n+1) = u_{n+1}.$$

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

**6.** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante donc d'après le théorème de la limite monotone soit elle converge soit elle diverge vers $+\infty$.

Supposons qu'elle converge et notons $\ell$ sa limite. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [1,+\infty[$ alors $\ell \in [1,+\infty[$ et $f$ est donc continue en $\ell$.

Par ailleurs, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(u_n) = u_n - \ln(u_n) = n.$$

Le membre de gauche tend vers $f(\ell) = \ell - \ln(\ell)$ et le membre de droite vers $+\infty$. Contradiction.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

**7.** On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\frac{n}{u_n} = \frac{u_n - \ln(u_n)}{u_n} = 1 - \frac{\ln(u_n)}{u_n}.$$

Or comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors par croissance comparée :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{u_n} = 1$$

et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

On en déduit alors que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} - 1 = 0$$

ce qui signifie que $u_n - n = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$ c'est-à-dire $u_n = n + \underset{n\to+\infty}{o}(n)$.

**8.** On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$u_n - n = \ln(u_n) = \ln(n + \underset{n\to+\infty}{o}(n)) = \ln(n) + \ln(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)) = \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(1).$$

# Partie 3– Étude d'un système différentiel

Soit $a, b, c, d$ des réels strictement positifs.
On considère le système différentiel ci-dessous où $x$ et $y$ désignent respectivement l'effectif d'une population de bactéries et l'effectif d'une population de protozoaires en fonction de $t \in \mathbb{R}_+$.
Enfin, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ désigne les effectifs relevés à un instant $t_0 \in \mathbb{R}_+$.
**On admet**, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}_+$ et tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ l'**existence d'un unique couple** $(x, y)$ de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$(S) \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & (a - by(t))x(t) \\ y'(t) & = & (cx(t) - d)y(t) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right.$$

**9.** Soient $t_0 \in \mathbb{R}_+$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

**(a)** Dans cette question uniquement, on suppose $x_0 = 0$.
Les fonctions $x$ et $y$ définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad x(t) = 0 \quad \text{et} \quad y(t) = y_0 e^{-d(t-t_0)}$$

sont bien dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$x'(t) = 0 = (a - by(t))x(t) \quad \text{et} \quad y'(t) = -dy(t) = (cx(t) - d)y(t)$$

avec $x(t_0) = 0$ et $y(t_0) = y_0$. Donc $(x, y)$ est une solution et par unicité (admise dans l'énoncé) c'est la solution.

**(b)** De la même façon, on vérifie que les fonctions $x$ et $y$ définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)} \quad \text{et} \quad y(t) = 0$$

forment l'unique couple solution.

**(c)** Soient $x_0$ et $y_0$ des conditions initiales pour lesquelles les solutions sont constantes :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad x(t) = x_0 \quad ; \quad y(t) = y_0.$$

On a alors, les dérivées de $x$ et $y$ étant nulles, $(S)$ qui s'écrit :

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & (a - by_0)x_0 \\ 0 & = & (cx_0 - d)y_0 \end{array} \right.$$

donc soit $(x_0, y_0) = (0, 0)$ soit $(x_0, y_0) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$.

**10.** On suppose dorénavant que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

**(a)** Supposons par l'absurde qu'il existe $t_1$ tel que $x(t_1) = 0$. Alors, $(x, y)$ est solution du système :

$$(S) \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & (a - by(t))x(t) \\ y'(t) & = & (cx(t) - d)y(t) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t_1) = 0 \\ y(t_1) = y_1 \end{array} \right.$$

où $y_1 = y(t_1)$.

Or d'après la question **10.a)**, l'unique solution $(x,y)$ est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad x(t) = 0 \quad \text{et} \quad y(t) = y_1 e^{-d(t-t_1)}.$$

En particulier, $x(t_0) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse $x_0 > 0$. Par conséquent, on en déduit que $x$ ne s'annule pas.

On montre de même avec la question **10.b)** que $y$ ne s'annule pas.

**(b)** Soit $(x,y)$ solution de $(S)$ avec $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$. Alors $x$ et $y$ sont continues et ne s'annulent pas d'après la question précédente. Elles sont donc de signe constant (d'après le TVI).

Comme $x(t_0) = x_0$ et $y(t_0) = y_0$ sont strictement positifs alors on en déduit que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad x(t) > 0 \quad \text{et} \quad y(t) > 0.$$

**11.** On note $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \varphi(x,y) = cx - d\ln(x) + by - a\ln(y).$$

On admet que $\varphi$ est de classe $C^1$ et qu'elle admet au moins un extremum.

**(a)** Pour tout $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = c - \frac{d}{x} \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = b - \frac{a}{y}.$$

**(b)** Soit $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. On a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \iff (x,y) = \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right).$$

L'unique point critique est donc $\left(\dfrac{d}{c}, \dfrac{a}{b}\right)$.

**(c)** On a :

$$\varphi\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right) = d - d\ln\left(\frac{d}{c}\right) + a - a\ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

Or d'après la question **2.** on sait que pour tout $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ on a :

$$a\left(\ln\left(\frac{by}{a}\right) - \frac{by}{a} + 1\right) \leq d\left(-\ln\left(\frac{cx}{d}\right) + \frac{cx}{d} - 1\right)$$

c'est-à-dire, en utilisant les propriétés du logarithme :

$$-a\ln\left(\frac{a}{b}\right) + a\ln(y) - by + a \leq d\ln\left(\frac{d}{c}\right) - d\ln(x) + cx - d$$

ou encore en réarrangeant les termes :

$$-d\ln\left(\frac{d}{c}\right) + d - a\ln\left(\frac{a}{b}\right) + a \leq -d\ln(x) + cx - a\ln(y) + by$$

c'est-à-dire :

$$\varphi\left(\frac{d}{c},\frac{a}{b}\right) \leq \varphi(x,y).$$

Ainsi $\varphi$ admet un minimum global en $\left(\frac{d}{c},\frac{a}{b}\right)$.

**12.** Soit $(x,y)$ un couple solution de $(S)$ avec $x_0>0$ et $y_0>0$ et notons $h : t\mapsto \varphi(x(t),y(t))$ (bien définie d'après **10.b**).
D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, on a :

$$\begin{aligned} h'(t) &= x'(t)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x(t),y(t)) + y'(t)\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x(t),y(t)) \\ &= x'(t)\left(c-\frac{d}{x(t)}\right)+y'(t)\left(b-\frac{a}{y(t)}\right) \\ &= \frac{x'(t)(cx(t)-d)}{x(t)}+\frac{y'(t)(by(t)-a)}{y(t)}. \end{aligned}$$

Or $(x,y)$ étant solution de $(S)$ on a pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ :

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{x'(t)(cx(t)-d)}{x(t)}+\frac{y'(t)(by(t)-a)}{y(t)} \\ &= \frac{(a-by(t))x(t)(cx(t)-d)}{x(t)}+\frac{(cx(t)-d)y(t)(by(t)-a)}{y(t)} \\ &= (a-by(t))(cx(t)-d)+(cx(t)-d)(by(t)-a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $h$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}_+$.

**13.** Dans cette question, on met en place une résolution numérique de $(S)$ sur un intervalle $[0,T]$ $(T>0)$ avec la méthode d'Euler. On se fixe un nombre de subdivisions $n\in\mathbb{N}^*$ et, à partir de la condition initiale $(x_0,y_0)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, on construit deux suites $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et $(y_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ définie par :

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\quad \begin{cases} x_{k+1} &= x_k+\dfrac{T}{n}x_k(a-by_k) \\ y_{k+1} &= y_k+\dfrac{T}{n}y_k(cx_k-d) \end{cases}$$

**(a)** D'après l'énoncé on a donc :

```
def resol(x0,y0,T,n):
    x = x0 ; y = y0
    t = 0
    Lx = [x]
    Ly = [y]
    Lt = [t]
    for k in range(1,n):
        Lx.append(Lx[-1]+T/n*Lx[-1]*(a-b*Ly[-1]))
        Ly.append(Ly[-1]+T/n*Ly[-1]*(c*Lx[-1]-d))
        Lt.append(Lt[-1]+T/n)
    return [Lt,Lx,Ly]
```

**(b)** On ajoute au code précédent :

```
1 x0 = 1; y0= 0.5 ; T = 20 ; n = 2000
2
3 def trace_pop():
4         L = resol(x0,y0,T,n)
5         plt.plot(L[0],L[1])
6         plt.plot(L[0],L[2])
7         plt.show()
```

La ligne 1 initialise les variables.

La ligne 4 permet d'obtenir les suites $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et $(y_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ obtenues par la méthode d'Euler et les lignes suivantes tracent les suites de points $\left(k\dfrac{T}{n}, x_k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et $\left(k\dfrac{T}{n}, x_k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$.

**(c)** Compte tenu des conditions initiales $x_0 = 1$ et $y_0 = 0.5$ la courbe en pointillés correspond à la suite $\left(k\dfrac{T}{n}, y_k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ approximation de la courbe représentative de $y$ sur $[0, T]$.

De même la courbe en trait plein correspond à la suite $\left(k\dfrac{T}{n}, x_k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ approximation de la courbe représentative de $x$ sur $[0, T]$.

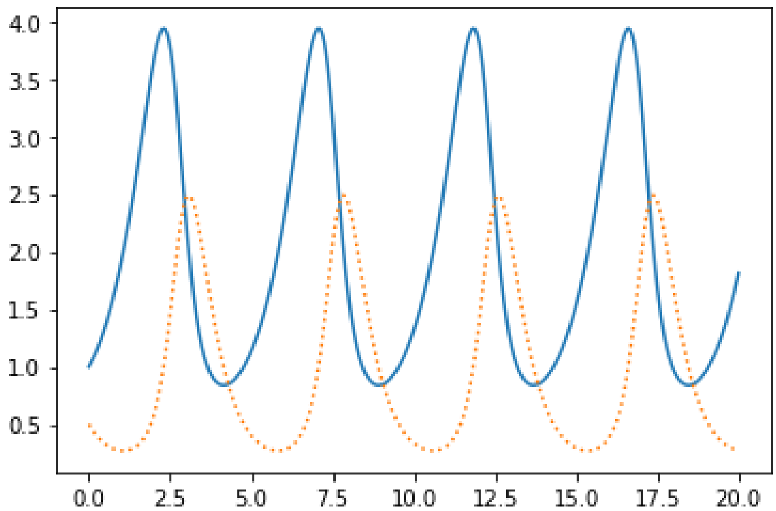


FIGURE 1 – Tracé donné par `trace_pop`