Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD4

Équations différentielles

1 Équations différentielles

Correction de l'exercice 1. 1. On considère l'équation $y'(x) = y(x)\ln x$, $y(1) = 1$.

— **Méthode 1** : on reconnaît une équation linéaire d'ordre 1 donc les solutions sont les fonctions de la forme :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad y(x) = ce^{x\ln(x)-x}$$

car $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de ln.
On détermine ensuite la constante c à l'aide de la condition initiale $y(1) = 1$:

$$1 = y(1) = ce^{-1} \quad \text{d'où} \quad c = e^1.$$

Finalement l'unique solution est la fonction y définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad y(x) = e^{x\ln(x)-x+1}.$$

— **Méthode (séparation des variables)**

(a) (Analyse) Sur un intervalle I ouvert contenant $x_0 = 1$, contenu dans $]0,+\infty[$ où y ne s'annule pas on a :

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \ln(x) \quad \text{et} \quad y(1) = 1$$

De plus, comme $y(1) > 0$ et ne s'annule pas sur I, par le TVI $y > 0$ sur I donc, en primitivant :

$$\ln(y(x)) = x\ln(x) - x + c \quad \text{et} \quad y(1) = 1$$

pour une constante c. En utilisant la condition initiale, on trouve que $c = 1$ donc :

$$\forall x \in I,\ y(x) = e^{x\ln(x)-x+1}.$$

(b) (Synthèse) Vérifions que la fonction y définie sur $I =]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in I,\ y(x) = e^{x\ln x - x + 1}$$

est solution.
On vérifie assez facilement que cette fonction est de classe C^1 sur I, $y(1) = 1$ et $y'(x) = \ln(x)y(x)$.

2. On considère l'équation $\frac{dy}{dx} = y\ln(x) + 1$, $y(1) = 1$ qui se réécrit aussi $y'(x) = y(x)\ln(x) + 1$.

Il s'agit donc d'une équation avec second membre dont l'équation homogène est l'équation précédente. Les solutions de cette équation homogène sont de la forme

$$y : x \in]0, +\infty[\longmapsto c e^{x \ln x - x}$$

pour une certaine constante c.
Appliquons la méthode de variation de la constante en cherchant une solution particulière de notre équation non homogène sous la forme

$$y(x) = c(x) e^{x \ln x - x}, x \in I$$

où c est une fonction de classe C^1 sur I, et, pour respecter la valeur initiale $y(1) = 1$, $c(1) = e$. On voit alors que

$$\forall x \in I,\ c'(x) e^{x \ln x - x} = 1$$

c'est-à-dire

$$c'(x) = e^{-x \ln x + x} \quad \text{et} \quad \lambda(1) = e.$$

D'où

$$\forall x \in I,\ c(x) = \int_1^x e^{-t \ln t + t}\, dt + e.$$

Finalement, la solution du problème de Cauchy est la fonction y définie sur I par :

$$\forall x \in I,\ y(x) = \int_1^x e^{-t \ln t + t} . e^{x \ln x - x}\, dt + e^{x \ln x - x + 1}.$$

3. On considère l'équation $y'(x) = -\dfrac{x^2}{y(x)}$, $y(0) = 1$.

   (a) (Analyse) Cette équation n'a de sens que sur un intervalle I contenant 1 sur lequel y ne s'annule pas et donc, comme $y(0) = 1$, par le TVI, sur un intervalle I où y est strictement positive.
   Cette équation implique que

   $$\forall x \in I,\ y(x) y'(x) = -x^2 \quad \text{et} \quad y(0) = 1$$

   et donc, en intégrant,

   $$\forall x \in I,\ \frac{1}{2} y^2(x) = -\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2}.$$

   On obtient alors

   $$\forall x \in I,\ y^2(x) = 1 - \frac{2}{3} x^3$$

   Sur l'intervalle I, y ne peut s'annuler et donc $I \subset \left] -\infty, \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \right[$ et comme y est strictement positive sur cet intervalle, on obtient finalement

   $$\forall x \in I,\ y(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{3} x^3}.$$

(b) (Synthèse) En définissant, sur $I = \left]-\infty, \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right[$, $y(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{3}x^3}$, on a $y(0) = 1$, y de classe C^1 sur I et

$$\forall x \in I,\ y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{2}{3}x^3}}(-\frac{2}{3}3x^2) = -\frac{x^2}{y(x)}.$$

On a donc trouvé une solution à ce problème de Cauchy sur un intervalle I, qui, du fait de l'analyse faite, est le plus grand possible et garantit l'unicité de cette solution sur cet intervalle.

4. On considère $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+y^2}{x.y}$ avec $y(1) = 1$ qui s'exprime aussi

$$y'(x) = \frac{x^2+y^2(x)}{xy(x)}.$$

On travaille sur un intervalle I sur lequel x et y ne s'annulent pas, contenant 1. Posons, sur I, $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$. On a $y(x) = xu(x)$ et donc :

$$y'(x) = u(x) + xu'(x).$$

Ainsi y est solution de l'équation d'origine si et seulement si, en substituant, sur I,

$$u(x) + xu'(x) = \frac{x^2 + x^2u(x)^2}{x^2u(x)} \quad \text{et} \quad u(1) = 1.$$

Après simplification, il vient

$$xu'(x) = \frac{1}{u(x)} \quad \text{et} \quad u(1) = 1$$

c'est-à-dire

$$u(x)u'(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(u(x)^2) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad u(1) = 1.$$

On primitive pour obtenir

$$\forall x \in I,\ u(x)^2 = 2\ln(x) + 1.$$

Comme u ne peut s'annuler sur I, on a $I \subset]e^{-\frac{1}{2}}, +\infty[$ et finalement

$$u(x) = \sqrt{1+2\ln x} \quad \text{et} \quad y(x) = x\sqrt{1+2\ln x}.$$

On vérifie rapidement, en guise de synthèse que la fonction y définie par $y(x) = x\sqrt{1+2\ln x}$ pour $x > e^{-\frac{1}{2}}$, est effectivement solution du problème de Cauchy initial.

Correction de l'exercice 2. Soit y un solution de (E) et soit z la fonction définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\forall t \in I, \quad z(t) = y(\tan(t)).$$

Elle est deux fois dérivable car y et tan le sont et pour tout $t \in I$ on a :

$$z'(t) = (1+\tan^2(t))y'(\tan(t)) \quad ; \quad z''(t) = (1+\tan^2(t))^2y''(\tan(t)) + 2(1+\tan(t)^2)\tan(t)y'(t).$$

Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$z''(t) + 4z(t) = 0.$$
L'équation caractéristique $r^2+4=0$ possède deux racines complexes conjuguées $\pm 2i$ donc il existe a_1 et a_2 des réels tels que pour tout $t \in I$:
$$z(t) = a_1 \cos(2t) + a_2 \sin(2t).$$
La fonction tan étant bijective de I dans $\mathbb{R}$ de bijection réciproque arctan, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$y(x) = a_1 \cos(2\arctan(x)) + a_2 \sin(2\arctan(x)).$$
Réciproquement, on vérifie que les fonctions de la forme $x \mapsto a_1 \cos(2\arctan(x)) + a_2 \sin(2\arctan(x))$ sont bien des solutions (il faut le faire!!).

Correction de l'exercice 3. Soit y une solution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et posons $z : t \in \mathbb{R} \mapsto y(e^t)$.
Par composition z est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :
$$z'(t) = e^t y'(e^t) \quad ; \quad z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t).$$
On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$z''(t) + 2z'(t) + z(t) = e^{2t} y''(e^t) + 3e^t y'(e^t) + y(e^t) = 0.$$
L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$ et possède une unique solution : -1.
D'où l'existence de deux constantes a et b telles que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(e^t) = (at + b)e^{-t}.$$
Ainsi :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = \frac{a\ln(x) + b}{x}.$$
Réciproquement, on vérifie que les fonctions de la forme ci-dessus sont toutes des solutions de l'équation différentielle.

Correction de l'exercice 4.

1. Soit h la fonction définie sur I par : $\forall t \in I,\ h(t) = \sin(x(t))\cos(y(t))$. Il s'agit d'une composée de fonction dérivable donc elle est dérivable sur I et pour tout $t \in I$ on a :
$$\begin{aligned} h'(t) &= x'(t)\cos(x(t))\cos(y(t)) - y'(t)\sin(x(t))\sin(y(t)) \\ &= \sin(x(t))\sin(y(t))\cos(x(t))\cos(y(t)) - \cos(x(t))\cos(y(t))\sin(x(t))\sin(y(t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$
Ainsi, h est constante. Comme $h(0) = \sin(x(0))\cos(y(0)) = 0$ alors :
$$\forall t \in I, \quad h(t) = 0.$$

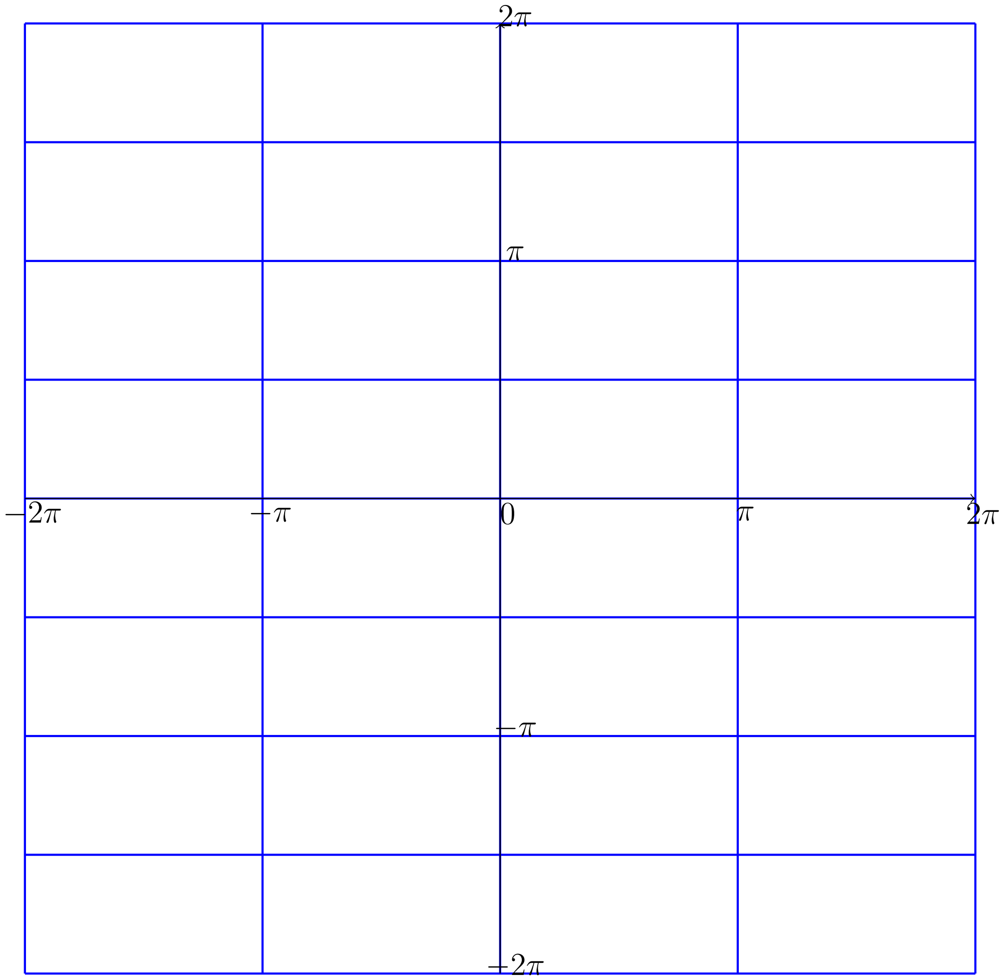

FIGURE 1 – En bleu, une partie de l'ensemble E

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned}\sin(a)\cos(b) = 0 &\iff \sin(a) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(b) = 0 \\ &\iff a = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad b = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$E = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{k\pi\} \times \mathbb{R}\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{R} \times \{\frac{\pi}{2} + n\pi\}\right).$$

L'ensemble $\{(x(t), y(t))\ ;\ t \in I\} \subset I$.

3. (a) Montrons d'abord que x ne prend aucune des valeurs de $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ ($k \neq 0$, $k \neq 1$). Supposons le contraire, c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ ($k \neq 0$, $k \neq 1$) et $t_0 \in I$ tel que $x(t_0) = k$.
   - Si $k \geq 2$ alors comme $x(0) = \dfrac{\pi}{2}$ et que x est continue, alors d'après le TVI, il existe $t_1 \in]0, t_0$ tel que : $x(t_1) = \pi$ ce qui contredit l'hypothèse initiale.
   - Si $k < 0$ alors comme $x(0) = \dfrac{\pi}{2}$ et que x est continue, alors d'après le TVI, il existe $t_1 \in]0, t_0$ tel que : $x(t_1) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse initiale.

Ainsi, x ne prend aucune des valeurs de $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, d'après la question précédente on déduit donc :

$$\forall t \in I,\ \exists n(t) \in \mathbb{Z} \quad y(t) = \frac{\pi}{2} + \pi n(t).$$

La fonction $n : t \mapsto n(t) = \dfrac{y(t)}{\pi} + \dfrac{1}{2}$ est continue et à valeurs entières donc constante (sinon, d'après le TVI, elle prendrait des valeurs non entières !). Enfin commet $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$ on a donc :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = \frac{\pi}{2}.$$

(b) C'est immédiat.

(c) Soit z la fonction définie sur I par :

$$\forall t \in I, \quad z(t) = \tan\left(\frac{x(t)}{2}\right).$$

La fonction z est dérivable sur I en tant que composée de fonctions dérivables. De plus pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{1}{2}x'(t)\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x(t)}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin(x(t))}{2\cos^2\left(\frac{x(t)}{2}\right)} \\ &= \frac{2\cos\left(\frac{x(t)}{2}\right)\sin\left(\frac{x(t)}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x(t)}{2}\right)} \\ &= z(t). \end{aligned}$$

Donc, il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in I, \quad z(t) = ce^t \quad \text{càd} \quad x(t) = 2\arctan(ce^t).$$

Compte tenu de la condition $x(0) = \dfrac{\pi}{2}$, on trouve que $x = 1$ et donc

$$\forall t \in I, \quad x(t) = 2\arctan(e^t).$$

4. Supposons que x prend la valeur 0 ou π et soit t_0 le premier instant ou x vaut 0 ou π. Alors sur l'intervalle $J = [0, t_0[$, x ne prend ni la valeur 0 ni la valeur π. D'après la question précédente, on a donc :

$$\forall t \in [0, t_0[, \quad x(t) = 2\arctan(e^t).$$

Donc par continuité on aurait :

$$x(t_0) = 2\arctan(e^{t_0}).$$

Cela est contradictoire car :

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad 0 < 2\arctan(e^t) < \pi.$$

Ainsi on est toujours dans les conditions de la question précédente et par conséquent l'unique solution est :

$$\forall t \in I, \quad x(t) = 2\arctan(e^t) \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{\pi}{2}.$$

Correction de l'exercice 5.

1. On a :

$$\forall t \in I,\, e(t) = x(t)^3 y(t)^4$$

et en dérivant, on obtient pour tout $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} e(t) &= 3x(t)^2 x'(t) y(t)^4 + 4x(t)^3 y(t)^3 y'(t) \\ &= 3x(t)^2 y(t)^4 (-4x(t)^3 y(t)^3) + 4x(t)^3 y(t)^3 (3x(t)^2 y(t)^4) \\ &= 0. \end{aligned}$$

La fonction e, de dérivée nulle sur I, y est constante. On a

$$\forall t \in I,\, e(t) = e(0) = 1^3 \times 1^4 = 1.$$

2. On pose $\mathcal{C} = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2,\, E(X, Y) = 1\}$.

(a) On a $(X, Y) \in \mathcal{C}$ si et seulement si $X \neq 0$ et $Y^4 = \dfrac{1}{X^3}$,c'est-à-dire :

$$X > 0 \quad \text{et} \quad Y = \frac{1}{X^{\frac{3}{4}}} \quad \text{ou} \quad Y = -\frac{1}{X^{\frac{3}{4}}}.$$

C'est la réunion des graphes des fonctions $f_\pm : x \in]0, +\infty[\mapsto \pm\dfrac{1}{x^3}$

ou du graphe de la fonction $g : y \in \mathbb{R}^* \mapsto \sqrt[3]{\dfrac{1}{y^4}}$.

(b) Comme, pour $t \in I$ quelconque, $e(t) = 1$ et donc $x(t)^3 y(t)^4 = 1$, on a $(x(t), y(t)) \in \mathcal{C}$.
Finalement $\{(x(t), y(t)),\, t \in I\} \subset \mathcal{C}$.
On ne peut avoir égalité car $\mathcal{C}$ comporte deux morceaux et la courbe $\{(x(t), y(t)),\, t \in I\}$ est d'un seul tenant : elle doit donc être contenu dans l'un des deux morceaux et éviter l'autre.
Plus précisément notons

$$\mathcal{C}^+ = \left\{(X, Y) \in \mathbb{R}^2,\, X > 0 \text{ et } Y = \frac{1}{X^{\frac{3}{4}}}\right\} \quad ; \quad \mathcal{C}^- = \left\{(X, Y) \in \mathbb{R}^2,\, X > 0 \text{ et } Y = -\frac{1}{X^{\frac{3}{4}}}\right\}$$

les deux « morceaux »précédemment évoqués : $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$.
Si $(X, Y) \in \mathcal{C}^+$ alors $Y > 0$ et si $(X, Y) \in \mathcal{C}^-$ alors $Y < 0$.
La fonction y ($t \in I \mapsto y(t)$) est continue sur I et ne s'y annule pas (car sinon $e(t)$ s'annulerait), elle reste donc, par le théorème des valeurs intermédiaires de signe constant, et, comme $y(0) = 1$, on a $y > 0$. On en déduit que pour tout $t \in I$,

$$(x(t), y(t)) \in \mathcal{C}^+ \quad \text{et} \quad (x(t), y(t)) \notin \mathcal{C}^-.$$

(c) Les fonction x et y sont toutes deux positives (cf le raisonnement précédent pour y, pour x, un argument simple est le suivant : $e(t)$, de par sa formule, est du signe de $x(t)$ et donc $x(t) > 0$.)
Le système différentiel satisfait par (x, y) montre qu'alors, sur I, $x' < 0$ et $y' > 0$. En conclusion x est strictement décroissante alors que y est strictement croissante.

3. (a) On a, pour tout $t \in I$, $x(t)^3 y(t)^4 = 1$ et $y'(t) = 3x(t)^2 y(t)^4$.
Comme $x(t) = y(t)^{-\frac{4}{3}}$, $x(t)^2 = y(t)^{-\frac{8}{3}}$ et donc

$$y'(t) = 3y(t)^{-\frac{8}{3}} y(t)^4 = 3y(t)^{\frac{4}{3}}.$$

On réécrit cette équation sous la forme

$$\forall t \in I,\ \frac{y'(t)}{y(t)^{\frac{4}{3}}} = 3$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in I,\ \frac{d}{dt}\left(-3.y(t)^{-\frac{1}{3}}\right) = 3$$

après intégration, entre 0 et t

$$y(t)^{-\frac{1}{3}} - y(0)^{-\frac{1}{3}} = -t \quad \text{donc} \quad y(t) = \frac{1}{(1-t)^3}.$$

(b) On a, pour $t \in I$, $x(t)^3 y(t)^4 = 1$ et donc $x(t)^3 = (1-t)^{12}$, donc $x(t) = (1-t)^4$.

Correction de l'exercice 6.

1. En posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$X'(t) = AX(t).$$

2. (a) En effectuant un pivot de Gauss-Jordan, on vérifie que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
(b) On trouve $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

3. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y(t) = P^{-1}X(t)$
(a) On a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} X'(t) = AX(t) &\iff X'(t) = PDP^{-1}X(t) \\ &\iff P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) \\ &\iff (P^{-1}X)'(t) = DP^{-1}X(t) \quad \text{par linéairté de la dérivation} \\ &\iff Y'(t) = DY(t). \end{aligned}$$

(b) Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = Y(t) = P^{-1}X(t)$. On a donc

$$Y' = DY \iff \begin{cases} y_1' &= -2y_1 \\ y_2' &= y_2 \\ y_3' &= 5y_3 \end{cases} \iff \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3 \ \forall t \in \mathbb{R} \ \begin{cases} y_1(t) &= c_1 e^{-2t} \\ y_2(t) &= c_2 e^{t} \\ y_3(t) &= c_3 e^{5t} \end{cases}$$

Ainsi, il existe $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$: $Y(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} \\ c_2 e^{t} \\ c_3 e^{5t} \end{pmatrix}$.

D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$: $X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} c_2 e^{t} + c_3 e^{5t} \\ c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{5t} \\ c_1 e^{-2t} + c_2 e^{t} \end{pmatrix}$.

Enfin, les conditions initiales permettent de déterminer c_1, c_2, c_3 :

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} & & c_2 & + & c_3 & = & 1 \\ c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 2 \\ c_1 & + & c_2 & & & = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c_1 & + & c_2 & + & c_3 & = & 2 \\ & & c_2 & + & c_3 & = & 1 \\ c_1 & + & c_2 & & & = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c_3 &= -1 \\ c_2 &= 2 \\ c_1 &= 1. \end{cases}$$

Ainsi l'unique triplet solution est donné par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{t} - e^{5t} \\ e^{-2t} + 2e^{t} - e^{5t} \\ e^{-2t} + 2e^{t} \end{pmatrix}.$$

2 Dynamique de population

Correction de l'exercice 7.

1. Puisqu'on admet que pour tout $t \geq 0$, $P(t) > 0$, la fonction $\dfrac{P'}{P}$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On la note z et on a pour tout $t \geq 0$:

$$z(t) = \frac{P'(t)}{P(t)} = r \ln\left(\frac{\kappa}{P(t)}\right)$$

donc

$$z'(t) = -r \frac{kP'(t)}{P(t)^2} \frac{1}{\frac{\kappa}{P(t)}} = -r \frac{P'(t)}{P(t)} = -rz(t).$$

2. On en déduit qu'il existe une constante c telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{P'(t)}{P(t)} = z(t) = ce^{-rt}.$$

En évaluant en 0, on a même $c = r \ln \left(\frac{\kappa}{P_0} \right)$.
En intégrant, on obtient donc l'existence d'une constante d telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad \ln(P(t)) = -\frac{c}{r} e^{-rt} + d = \ln \left(\frac{P_0}{\kappa} \right) e^{-rt} + d.$$

En passant à l'exponentielle on a alors :

$$\forall t \geq 0, \quad P(t) = e^d e^{\ln\left(\frac{P_0}{\kappa}\right) e^{-rt}}.$$

Finalement, en évaluant en 0, on voit que $e^d = \kappa$ d'où l'expression :

$$\forall t \geq 0, \quad P(t) = \kappa e^{\ln\left(\frac{P_0}{\kappa}\right) e^{-rt}}.$$

Correction de l'exercice 8.

1. (a) Comme P est dérivable, alors f l'est également et on a , pour tout $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= rP'(t) \left(1 - \frac{P(t)}{\kappa} \right) - \frac{r}{\kappa} P'(t) P(t) \\ &= rP'(t) \left(1 - 2\frac{P(t)}{\kappa} \right) \\ &= f(t) \left(1 - 2\frac{P(t)}{\kappa} \right). \end{aligned}$$

En notant G la primitive de $t \mapsto \left(1 - 2\frac{P(t)}{\kappa} \right)$ s'annulant en 0 on a donc une constante c telle que :

$$\forall t \geq 0, \quad f(t) = ce^{G(t)}.$$

(b) Par hypothèses : $f(0) = rP_0 \left(1 - \frac{P_0}{\kappa} \right) > 0$ car $P_0 \in]0, \kappa[$. Avec la question précédente on obtient donc :

$$f(0) = ce^{G(0)} = c \quad \text{donc} \quad c > 0.$$

Il est alors clair que pour tout $t \geq 0$:

$$f(t) = f(0) e^{G(t)} > 0.$$

(c) Soit $Q(X) = rX \left(1 - \frac{X}{\kappa} \right)$. Il s'agit d'un polynôme du seconde degré de coefficient dominant négatif et de racines 0 et κ. Son signe est donné par :

x	$-\infty$		0		κ		$+\infty$
$Q(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On a par ailleurs, $f = Q \circ P$ qui est continue et telle que $f(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ d'après la question précédente. Donc nécessairement pour tout $t \geq 0$, $P(t) \in]0, \kappa[$.

2. **Résolution.**

   (a) On vérifie que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,\kappa\} \quad \frac{\kappa}{x(\kappa - x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\kappa - x}.$$

   (b) Comme f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$, l'équation à résoudre est équivalente, en divisant par f à :

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{P'(t)}{P(t)\left(1 - \frac{P(t)}{\kappa}\right)} = r$$

   ou encore

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{\kappa P'(t)}{P(t)\left(\kappa - P(t)\right)} = r$$

   ou encore, d'après la question précédente :

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{P'(t)}{P(t)} + \frac{P'(t)}{\kappa - P(t)} = r.$$

   Comme les dénominateurs sont positifs (une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln |u|$! !) d'après la question 1, on en déduit l'existence d'une constant c telle que :

$$\forall\ t \geq 0, \quad \ln\left(P(t)\right) - \ln(\kappa - P(t)) = rt + c.$$

   En passant à l'exponentielle et en isolant P on trouve :

$$\forall t \geq 0, \quad P(t) = \frac{\kappa e^{rt+c}}{1 + e^{rt+c}}.$$

   La constante c peut s'exprimer à l'aide de P_0 :

$$e^c = \frac{P_0}{\kappa - P_0}.$$

3 Preuve

Correction de l'exercice 9. La fonction y est deux fois dérivable car solution de (E).

1. **Cas où l'équation caractéristique à deux solutions distinctes réelles** notées r_1 et r_2.

   (a) On a, pour tout $r \in \mathbb{R}$:

$$r^2 + ar + b = (r - r_1)(r - r_2) = r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1 r_2.$$

   En identifiant, on obtient donc

$$r_1 r_2 = b \quad \text{et} \quad r_1 + r_2 = -a.$$

(b) D'après la question précédente, on a donc : Ainsi, par linéarité de la dérivation :

$$(y'-r_1y)'-r_2(y'-r_1y)=y''-(r_1+r_2)y'+r_1r_2y=y''+ay'+b=0$$

car y solution de (E). La fonction $y'-r_1y$ est donc solution de l'équation

$$z'-r_2z=0.$$

(c) On en déduit qu'il existe un réel c tel que : $\forall t\in\mathbb{R},\quad y'(t)-r_1y(t)=ce^{r_2t}$. Résolvons cette équation.

— Équation homogène associée : les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions de la forme $y_h : t\mapsto \lambda_1e^{r_1t}$, $d\in\mathbb{R}$.

— Solution particulière : on utilise la méthode de variation de la constante. Cherchons une solution particulière y_p sous la forme $y_p : t\mapsto C(t)e^{r_1t}$ où C est dérivable. On a alors y_p est solution si et seulement si pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y_p'(t)-r_1y(t)=ce^{r_2t} &\iff C(t)r_1e^{r_1t}+C'(t)e^{r_1t}-r_1C(t)e^{r_1t}=ce^{r_2t}\\ &\iff C'(t)e^{r_1t}=ce^{r_2t}\\ &\iff C'(t)=ce^{(r_2-r_1)t}\end{aligned}$$

En particulier, en prenant $C : t\mapsto \dfrac{c}{r_2-r_1}e^{(r_2-r_1)t}$ on obtient une solution particulière :

$$y_p : t\longmapsto \frac{c}{r_2-r_1}e^{r_2t}.$$

— Conclusion : les solutions de $y'-r_1y=ce^{r_2t}$ sont les fonctions de la forme :

$$y : t\longmapsto \lambda_1e^{r_1t}+\frac{c}{r_2-r_1}e^{r_2t}.$$

(d) D'après les questions précédentes, en posant $\lambda_2=\dfrac{c}{r_2-r_1}$, la fonction y est bien de la forme voulue.

(e) On a montré que si y est solution de (E) il existe des réels λ_1 et λ_2 tels que : $\forall t\in\mathbb{R},\ y(t)=\lambda_1e^{r_1t}+\lambda_2e^{r_2t}$.
Réciproquement, soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ et notons y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad y(t)=\lambda_1e^{r_1t}+\lambda_2e^{r_2t}.$$

Il est clair que y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $t\in\mathbb{R}$ on a

$$y'(t)=r_1\lambda_1e^{r_1t}+r_2\lambda_1e^{r_2t}\quad ;\quad y''(t)=r_1^2\lambda_1e^{r_1t}+r_2^2\lambda_1e^{r_2t}.$$

Ainsi, pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y''(t)+ay'(t)+by(t)&=\lambda_1e^{r_1t}\left(r_1^2+ar_1+b\right)+\lambda_2e^{r_2t}\left(r_2^2+ar_2+b\right)\\ &=0.\end{aligned}$$

Ainsi y est bien solution.
Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions telle qu'il existe des réels λ_1 et λ_2 pour lesquels : $\forall t\in\mathbb{R},\ y(t)=\lambda_1e^{r_1t}+\lambda_2e^{r_2t}$.

2. **Cas où l'équation caractéristique à une unique solution réelle** notée r_0.
   (a) Comme r_0 est l'unique racine de $r^2 + ar + b$ on sait que :
   $$r^2 + ar + b = (r - r_0)^2 = r^2 - 2r_0 r + r_0^2$$
   donc, par identification $a = -2r_0$ et $b = r_0^2$.
   (b) La fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :
   $$z'(t) = e^{-r_0 t}(y'(t) - r_0 y(t)) \quad \text{et} \quad z''(t) = e^{-r_0 t}(y''(t) - 2r_0 y'(t) + r_0^2 y(t)).$$
   Or r_0 étant l'unique racine de $r^2 + ar + b$ on a :
   $$r^2 + ar + b = (r - r_0)^2 = r^2 - 2r_0 r + r_0^2$$
   Ainsi, comme y est solution de $y'' + ay' + b = 0$, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$z''(t) = e^{-r_0 t}(y''(t) - 2r_0 y'(t) + r_0^2 y(t)) = e^{-r_0 t}(y''(t) + ay'(t) + by(t)) = 0.$$
   (c) La fonction z est donc affine : il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$z(t) = \lambda_1 + t\lambda_2 \quad \text{i.e} \quad y(t) = (\lambda_1 + t\lambda_2)e^{r_0 t}.$$
   (d) D'après les questions précédentes, si y est solution de (E) alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$z(t) = \lambda_1 + t\lambda_2 \quad \text{i.e} \quad y(t) = (\lambda_1 + t\lambda_2)e^{r_0 t}.$$
   Réciproquement, soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et notons y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = (\lambda_1 + t\lambda_2)e^{r_0 t}.$$
   Il est clair que y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a
   $$y'(t) = r_0(\lambda_1 + t\lambda_2)e^{r_0 t} + \lambda_2 e^{r_0 t} \quad ; \quad y''(t) = \left(r_0^2(\lambda_1 + t\lambda_2) + r_0\lambda_2\right) e^{r_0 t} + r_0\lambda_2 e^{r_0 t}.$$
   Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$\begin{aligned} y''(t) + ay'(t) + by(t) &= e^{r_0 t}\left(r_0^2(\lambda_1 + t\lambda_2) + r_0\lambda_2 + r_0\lambda_2 + a(r_0(\lambda_1 + t\lambda_2) + \lambda_2) + b(\lambda_1 + t\lambda_2)\right) \\ &= e^{r_0 t}\left((\lambda_1 + t\lambda_2)(r_0^2 + ar_0 + b) + (2r_0 + a)\lambda_2\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$
   car $r_0^2 + ar_0 + b = 0$ et $a = -2r_0$. Ainsi y est solution de E.
   Finalement, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme $t \mapsto (\lambda_1 + t\lambda_2)e^{r_0 t}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
3. **Cas où l'équation caractéristique à deux solutions complexes conjuguées** notées $\alpha \pm i\beta$.
   (a) La même preuve que la question 1 montre qu'il existe deux complexes λ_1 et λ_2 tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$y(t) = \lambda_1 e^{\alpha + i\beta t} + \lambda_2 e^{\alpha - i\beta t} = e^{\alpha t}(\lambda_1 e^{i\beta t} + \lambda_2 e^{-i\beta t}).$$

(b) Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t)$ est réelle, on a, en passant au conjugué :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \overline{y(t)} = e^{\alpha t}(\overline{\lambda}_1 e^{-i\beta t} + \overline{\lambda}_2 e^{i\beta t}).$$

En regardant en $t = 0$ on obtient :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = y(0) = \overline{y(0)} = \overline{\lambda}_1 + \overline{\lambda}_2.$$

En regardant en $t = \dfrac{\pi}{2\beta}$ on obtient :

$$e^{\frac{\alpha\pi}{2\beta}}(i\lambda_1 - i\lambda_2) = y(0) = \overline{y(0)} = e^{\frac{\alpha\pi}{2\beta}}(-i\overline{\lambda}_1 + i\overline{\lambda}_2)$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1 - \lambda_2 = -\overline{\lambda}_1 + \overline{\lambda}_2.$$

En additionnant c'est deux équations on obtient :

$$\lambda_1 = \overline{\lambda}_2.$$

Ainsi, en écrivant $2\lambda_1 = A - iB$ on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\alpha t}\left(\frac{A - iB}{2} e^{i\beta t} + \frac{A + iB}{2} e^{-i\beta t}\right) \\ &= e^{\alpha t}\left(A\frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} - iB\frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2}\right) \\ &= e^{\alpha t}\left(A\frac{e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}}{2} + B\frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i}\right) \\ &= e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right) \end{aligned}$$

(c) D'après la question précédente, si y est solution alors y est de la forme $t \mapsto e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right)$ pour des réels A, B.
Réciproquement, il faut vérifier que les fonctions de la forme $t \mapsto e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right)$ pour des réels A, B sont bien toutes solutions.