Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD5

Espaces vectoriels

1 Généralités

1.1 Sous-espaces vectoriels

Exercice 1 (Être ou ne pas être un SEV). Déterminer lesquels des ensembles F suivants sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + 4z - y = 0\}$,
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ xy + 4z = 0\}$,
3. $E = \mathbb{C}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \ ; \ x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$,
4. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + 4z = 0 \text{ ou } x + y + z = 0\}$,
5. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x + 4z = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$,
6. $E = \mathbb{R}[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \ ; \ \deg(P) \geq n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$,
7. Soit $T > 0, E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ f \text{ périodique de période } T\}$,
8. $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $F = \{(w_n)_n \ ; \ \exists \lambda, \nu \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, w_n = \lambda e^{in\frac{\pi}{3}} + \nu n 2^n\}$.

Exercice 2 (Être ou ne pas être SEV). Pour chacun des ensembles suivants, indiquer avec justification si c'est un espace vectoriel ou pas. On précisera le corps des scalaires ainsi que l'espace vectoriel de référence dont l'ensemble est un sev.

1. L'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de coefficient constant nul.
2. L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{3,5}(\mathbb{K})$ ayant une première colonne nulle.
3. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont nulles en 1 et nulles en 4 .
4. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont nulles en 1 ou nulles en 4 .
5. L'ensemble des fonctions f croissantes sur $\mathbb{R}$.
6. L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonales.
7. L'ensemble des suites arithmétiques à valeurs réelles.
8. L'ensemble des suites géométriques à valeurs complexes.
9. L'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré égal à $n \geqslant 2$ fixé.
10. L'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
11. L'ensemble des fonctions réelles définies sur $]-1, 1[$, continues, positives ou nulles.
12. L'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
13. L'ensemble des matrices carrées de taille n de diagonale nulle.
14. L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

1.2 Sous-espaces vectoriels engendrés

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une famille génératrice de F (mettre sous forme de Vect.

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y - z = 0 \quad \text{et} \quad x + y + z = 0\}$.
2. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E \mid a = 2c \right\}$.
3. $E = \mathbb{R}_3[x]$ et $F = \{(a + c)x + (2ax + b)x^2 - cx^2,\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.
4. $E = \mathbb{R}_2[x]$ et $F = \{P \in E \mid P(1) = P(2)\}$.

Exercice 5. Montrer que l'ensemble de suites à valeurs réelles vérifiant la récurrence suivante est un sev du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et en donner une famille génératrice.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

Exercice 6. Montrer que l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation suivante est un sev de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et en donner une famille génératrice.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0.$$

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^3$, on définit les vecteurs $\overrightarrow{u} = (2, 1, -3)$, $\overrightarrow{v} = (3, 2, -1)$, $\overrightarrow{s} = (1, 0, -5)$ et $\overrightarrow{t} = (1, 1, 2)$.
Montrer que $\text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \text{Vect}(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t})$.

2 Familles de vecteurs

2.1 Familles génératrices

Exercice 8. Dans chacun des cas suivants, dire si la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de E.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = ((1, -1, 2), (2, 1, -1), (-1, -5, 8))$.
2. $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{F} = (X^2 + 2X, X^2 + X + 1, X + 2)$.
3. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$.
4. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F} = ((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}, (4^n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Exercice 9. Dans l'espace $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les quatre polynômes

$$P_0(X) = 1\ ,\ P_1(X) = X - 1\ ,\ P_2(X) = (X - 1)^2\ ,\ P_3(X) = (X - 1)^3\ .$$

Soit F un élément de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Montrer que F peut se mettre sous la forme
$$F = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3.$$
2. Quelles sont les valeurs de $\lambda_0, \ldots, \lambda_3$? Quelle formule retrouve-t-on ?
3. Que peut-on dire de $\text{Vect}(P_0, P_1, P_2, P_3)$? Qu'est-ce que cela signifie sur la famille (P_0, P_1, P_2, P_3) ?

2.2 Familles libres

Exercice 10. Dans chacun des cas suivants, dire si la famille $\mathcal{F}$ est libre ou liée.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{F} = ((1,-1,2),(2,1,-1),(-1,-5,8))$.
2. Dans $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{F} = (X^2+2X, X^2+X+1, X+2)$.
3. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)$.
4. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F} = ((2^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}, (4^n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_k(x) = e^{-kx}.$$

Montrer que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Exercice 12. Soit E l'espace vectoriel des applications de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.
Soit f_1 et f_2 définies sur $]-1,1[$ par :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_1(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{1}{1+x}.$$

1. Montrer que (f_1, f_2) est libre.
2. Montrer que $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ appartient à $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

2.3 Bases

Exercice 13. Dans chaque cas, montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E et donner les coordonnées de u dans cette base.

1. $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((3,1,3),(2,2,1),(4,3,2))$ et $u = (3,2,1)$.
2. $E = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = ((0,1,0),(0,0,1),(1,0,0))$ et $u = (3,2,1)$.
3. $E = \mathbb{R}_2[X]$, $\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2)$ et $u = X^2+X+1$.
4. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ et $u = I_2$.

Exercice 14. Déterminer une base des espaces suivants :

1. $\{(x+y, y+z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$,
2. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+y-t=0 \quad \text{et} \quad y=t\}$,
3. $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(1)\}$,
4. $\{(a+c)X + (2aX+b)X^2 - cX^2 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$,
5. $\left\{\begin{pmatrix} a & a+b & 0\\ 2a+b & -b & 3a+2b\end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R}\right\}$,
6. $\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a+b = c+d\right\}$.

Exercice 15. Soit $n \geq 2$ et $H = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1+\dots+x_n = 0\}$.

1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de R^n.
2. On note $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$(e_1-e_2, e_1-e_3, \dots, e_1-e_n)$$

est une base de H.