Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD5

Espaces vectoriels

1 Généralités

1.1 Sous-espaces vectoriels

Correction de l'exercice 1.

1. Sev. Le polynôme nul est dans F et pour $(x,y,z),(x',y',z') \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :
$$(x+\lambda x') + 4(z+\lambda z') - (y+\lambda y') = x+4z-y+\lambda(x'+4z'-y') = 0$$
donc $(x,y,z)+\lambda(x',y',z') \in F$.
2. Non sev. $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$ sont dans F mais leur somme $(1,1,0)$ ne l'est pas.
3. Non sev. En effet $(1,i,0)$ et $(i,1,0)$ sont dans F mais leur somme $(1+i,1+i,0)$ ne l'est pas.
4. Non sev. En effet $(0,1,0)$ et $(1,-1,0)$ sont dans F mais leur somme $(1,0,0)$ ne l'est pas.
5. Sev. Le polynôme nul est dans F et pour $(x,y,z),(x',y',z') \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :
$$(x+\lambda x') + 4(z+\lambda z') = x+4z-y+\lambda(x'+4z') = 0$$
et
$$(x+\lambda x') + (y+\lambda y') + (z+\lambda z') = x+y+z+\lambda(x'+y'+z') = 0$$
donc $(x,y,z)+\lambda(x',y',z') \in F$.
6. Non sev. Le polynôme nul n'est pas dans $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\, deg(P) \geq n\}$.
7. Sev. La fonction nulle est de période de T et une combinaison linéaire de deux fonctions de même période T est encore une fonction de période T.
8. Sev. Si on note $u = (e^{in\frac{\pi}{3}})_n$ et $v = (n2^n)_n$ alors $F = \mathrm{Vect}(u,v)$.

Correction de l'exercice 2.

1. Sev. Il s'agit de l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et il est facile de voir que le polynôme nul vérifie cette condition et qu'elle est stable par combinaison linéaire.
2. Sev. Il est facile de voir que la matrice nulle vérifie cette condition et qu'elle est stable par combinaison linéaire.
3. Sev. Il est facile de voir que la fonction nulle vérifie cette condition et qu'elle est stable par combinaison linéaire.
4. Non sev. La fonction $x \mapsto x-4$ appartient à cet ensemble car elle s'annule en 4, de même que $x \mapsto x-1$ qui s'annule en 1. Mais la somme $x \mapsto 2x-5$ ne s'annule ni en 1 ni en 4.

5. Non sev. La fonction $f : x \mapsto x$ est croissante mais $(-1)f$ est strictement décroissante.
6. Sev.
7. Sev. L'ensemble est bien non vide. Soit $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites arithmétiques réelles de raison a et b respectivement et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(u + \lambda v)_{n+1} = u_{n+1} + \lambda v_{n+1} = u_n + \lambda v_n + a + \lambda b.$$

Donc $u + \lambda v$ est arithmétique de raison $a + \lambda b$.
8. Pas sev. La suite $(2^n)_n$ est géométrique et la suite constante égale à 1 aussi. Mais la suite $(2^n + 1)_n$ n'est pas géométrique.
9. Pas sev. Le polynôme nul n'est pas dedans.
10. Sev. La fonction nulle est paire et si f et g sont paires et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f + \lambda g)(-x) = f(-x) + \lambda g(-x) = f(x) + \lambda g(x) = (f + \lambda g)(x).$$

Donc $f + \lambda g$ est paire.
11. Pas sev. La fonction $x \in]-1,1[\mapsto 1$ est dans cette ensemble mais son opposé $x \in]-1,1[\mapsto -1$ non.
12. Sev par linéarité de la limite.
13. Sev.
14. Pas sev : la somme d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieur n'est en générale pas triangulaire.

Correction de l'exercice 3. Soit E un espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

— On suppose que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E et que $F \not\subseteq G$. Montrons qu'alors $G \subset F$.
  Comme $F \not\subseteq G$, il existe un vecteur $x_F \in F \backslash G$.
  Soit $g \in G$. Alors g et x_F sont des éléments de $F \cup G$. Comme par hypothèse il s'agit d'un sous-espace vectoriel (donc stable par somme) alors :

$$g + x_F \in F \cup G.$$

  Donc soit $g + x_F$ appartient à F soit $g + x_F$ appartient à G.
  Supposons que $g + x_F$ appartient à G. Comme G est stable par combinaison linéaire alors :

$$x_F = g + x_F - g \in G.$$

  Contradiction !
  Ainsi $g + x_F$ appartient à F et comme F est stable par combinaison linéaire alors :

$$g = g + x_F - x_F \in F.$$

  Ainsi $G \subset F$.

— Réciproquement, on suppose $G \subset F$ ou $F \subset G$. Par exemple $G \subset F$ (l'autre cas est similaire). Alors $G \cup F = F$ donc c'est un sous-espace vectoriel.

1.2 Sous-espaces vectoriels engendrés

Correction de l'exercice 4. Dans chaque cas, on va écrire F sous la forme $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ avec $u_i \in E$. En particulier, cela montrera que F est un sous-espace vectoriel de E dont une famille génératrice est $(u_1, \dots, u_n)$.

1. L'ensemble F est décrit par un système d'équations.
   (a) On écrit les conditions sous lesquelles un vecteur appartient à F sous forme d'un système.
   Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors
   $$(x,y,z) \in F \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & 2y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$
   (b) Ici le système est déjà sous forme triangulaire.
   (c) On exprime les inconnues principales en fonctions des autres.
   $$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -y-z \\ 2y & = & z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -3y \\ z & = & 2y \end{array} \right.$$
   (d) Finalement, $(x,y,z) \in F \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & -3y \\ z & = & 2y \end{array} \right.$. Donc
   $$F = \left\{(-3y, y, 2y) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{y(-3,1,2) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}((-3,1,2)).$$

   Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E et $((-3,1,2))$ est une famille génératrice de F.
2. L'ensemble F est décrit par une équation.
   On écrit les conditions sous lesquelles un vecteur appartient à F sous forme d'un système.
   Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F \iff a = 2c$$
   Ainsi :
   $$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} 2c & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ c\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$
   Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E et $\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de F.

3. L'ensemble F est donné sous forme paramétrique.
$$\begin{aligned} F &= \{(a+c)x + (2ax+b)x^2 - cx^2,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{a(x+2x^3) + bx^2 + c(x-x^2),\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \mathrm{Vect}(x+2x^3, x^2, x-x^2) \end{aligned}$$
Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E et $(x+2x^3, x^2, x-x^2)$ est une famille génératrice de F.
4. L'ensemble F est décrit par un système d'équations.
On écrit les conditions sous lesquelles un vecteur appartient à F sous forme d'un système.
Soit $P = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$. Alors
$$P \in F \iff P(1) = P(2) \iff a+b+c = 4a+2b+c \iff b = -3a.$$
Ainsi
$$\begin{aligned} F &= \left\{ax^2 - 3ax + c \mid a \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{a(x^2-3x) + c \mid a \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}(x^2-3x, 1). \end{aligned}$$
Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E et $(x^2-3x, 1)$ est une famille génératrice de F.

Correction de l'exercice 5. Soit (u_n) une telle suite. Elle vérifie donc une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est :
$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$
L'équation caractéristique n'a qu'une seule solution : 1.
Donc les éléments de l'ensemble en question sont les suites pour lesquelles il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + n\mu) \times 1^n = \lambda + n\mu.$$
Il s'agit donc de
$$\mathrm{Vect}(u, v)$$
où $u = (1)_n$ et $v = (n)_n$.

Correction de l'exercice 6. Montrer que l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation suivante est un sev de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et en donner une famille génératrice.
$$\forall x \in \mathbb{R},\ y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0.$$
Soit y une telle fonction. Elle vérifie donc une équation différentielle d'ordre 2 homogène à coefficients constants dont l'équation caractéristique est :
$$x^2 - 2x + 2 = 0.$$
Le discriminant de cette équation est : $\Delta = 4 - 4 \times 2 = -4$.
Ses racines sont donc $1+i$ et $1-i$.
Donc les éléments de l'ensemble en question sont les fonctions pour lesquelles il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = e^t(\lambda\cos(t) + \mu\sin(t)).$$
Il s'agit donc de
$$\mathrm{Vect}(t \mapsto e^t\cos(t), t \mapsto e^t\sin(t)).$$

Correction de l'exercice 7. On procède par double inclusion.

— Montrons que $\text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \subset \text{Vect}(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t})$. Pour cela, d'après la proposition 6, il suffit de montrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ appartiennent à $\text{Vect}(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t})$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont combinaisons linéaires de $\overrightarrow{s}$ et de $\overrightarrow{t}$.
On voit facilement que :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{s} + \overrightarrow{t} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{s} + 2\overrightarrow{t}.$$

Ainsi $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ appartiennent à $\text{Vect}(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t})$. Donc :

$$\text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \subset \text{Vect}(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}).$$

— De même, montrons que $\text{Vect}(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}) \subset \text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Pour cela, d'après la proposition 6, il suffit de montrer que $\overrightarrow{s}$ et $\overrightarrow{t}$ appartiennent à $\text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, c'est-à-dire que $\overrightarrow{s}$ et $\overrightarrow{t}$ sont combinaisons linéaires de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$.
On voit facilement que :

$$\overrightarrow{s} = 2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{t} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}.$$

Ainsi $\overrightarrow{s}$ et $\overrightarrow{t}$ appartiennent à $\text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Donc :

$$\text{Vect}(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}) \subset \text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}).$$

Ainsi : $\text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \text{Vect}(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t})$.

2 Familles de vecteurs

2.1 Familles génératrices

Exercice 1. 1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
&(x,y,z) \in \text{Vect}(\mathcal{F}) \\
&\iff \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \ (x,y,z) = \lambda_1(1,-1,2) + \lambda_2(2,1,-1) + \lambda_3(-1,-5,8) \\
&\iff \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & x \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 5\lambda_3 & = & y \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 8\lambda_3 & = & z \end{array}\right. \\
&\iff \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & x \\ & & 3\lambda_2 & - & 6\lambda_3 & = & x+y \\ & - & 5\lambda_2 & + & 10\lambda_3 & = & z-2x \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \\
&\iff \exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & x \\ & & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & \dfrac{x+y}{3} \\ & & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & \dfrac{2x-z}{5} \end{array}\right. \\
&\iff \frac{x+y}{3} = \frac{2x-z}{5}.
\end{aligned}$$

Donc, par exemple le vecteur $(0,0,1)$ n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ car

$$\frac{0+0}{3} \neq \frac{2\times 0-1}{5}.$$

Ainsi, $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $(a_0,a_1,a_2)\in\mathbb{R}^3$. Montrons que le système

$$a_0+a_1X+a_2X^2=\lambda_1(X^2+2X)+\lambda_2(X^2+X+1)+\lambda_3(X+2)$$

d'inconnues $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ possède des solutions.

$$\begin{aligned}
\lambda_1(X^2{+}2X)+\lambda_2(X^2+X+1)+\lambda_3(X+2)&=a_0+a_1X+a_2X^2\\
\iff \lambda_2+2\lambda_3+(2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)X+(\lambda_1+\lambda_2)X^2&=a_0+a_1X+a_2X^2\\
\iff &\left\{\begin{array}{ccccccc} & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & a_0\\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & a_1\\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & a_2\end{array}\right.\\
\iff &\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & a_0\\ -\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & a_1-2a_2\\ & & \lambda_1 & = & a_2-\lambda_2\end{array}\right.\\
\iff &\left\{\begin{array}{ccc} 3\lambda_2 & = & a_0-2(a_1-2a_2)\\ \lambda_3 & = & a_1-2a_2+\lambda_2\\ \lambda_1 & = & a_2-\lambda_2\end{array}\right.\\
\iff &\left\{\begin{array}{ccc} \lambda_2 & = & \dots\\ \lambda_3 & = & \dots\\ \lambda_1 & = & \dots\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $(a_0,a_1,a_2)\in\mathbb{R}^3$ le système

$$a_0+a_1X+a_2X^2=\lambda_1(X^2+2X)+\lambda_2(X^2+X+1)+\lambda_3(X+2)$$

d'inconnues $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ possède des solutions. La famille est donc génératrice.

3. Soit $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) \\
\iff &\exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3,\quad \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \\
\iff &\exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3,\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & x \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & y \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & z \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & t \end{array}\right. \\
\iff &\exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3,\quad \left\{\begin{array}{cccccc} \lambda_1 & & + & \lambda_3 & = & x \\ & -\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & y-2x \\ & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & z \\ & & & 2\lambda_2 & = & t-x \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ \\ \end{array} \\
\iff &\exists(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3,\quad \left\{\begin{array}{cccccc} \lambda_1 & & + & \lambda_3 & = & x \\ & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 2x-y \\ & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & z \\ & & & 2\lambda_2 & = & t-x \end{array}\right. \\
\iff &2x-y=z
\end{aligned}$$

Donc par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. La famille $\mathcal{F}$ n'est donc pas génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4. Supposons que $(5^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartienne à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. Alors il existe des réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 5^n = \lambda_1 2^n + \lambda_2 3^n + \lambda_3 4^n.$$

Donc, en divisant par 5^n :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 1 = \lambda_1\left(\frac{2}{5}\right)^n + \lambda_2\left(\frac{3}{5}\right)^n + \lambda_3\left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

En passant à la limite dans cet égalité, on obtient :

$$1 = 0.$$

Ceci est une contradiction. Ainsi $(5^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'appartient pas à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. En particulier F n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Correction de l'exercice 8. Soit F un élément de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Le polynôme $F(X+1)$ est degré inférieur ou égal à 3 (par degré d'un composé) et donc, il existe $\lambda_0,\dots,\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que

$$F(X+1) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \lambda_3 X^3.$$

Cela signifie que

$$F = \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3.$$

2. — En substituant 1 à X dans la formule précédente, on a $\lambda_0 = F(1)$;

— En dérivant cette formule puis en substituant 1 à X dans la formule obtenue, on a $\lambda_1 = F'(1)$;
— En dérivant encore la formule précédemment puis en substituant 1 à X dans la formule obtenue, on a $2\lambda_2 = F''(1)$;
— Enfin, en dérivant encore la formule précédemment puis en substituant 1 à X dans la formule obtenue, on a $6\lambda_3 = F^{(3)}(1)$;

On a donc :

$$\begin{aligned} F &= F(1).P_0 + F'(1).P_1 + \frac{1}{2}.F''(1).P_2 + \frac{1}{6}.F^{(3)}(1).P_3 \\ &= F(1) + F'(1)(X-1) + \frac{1}{2}F''(1)(X-1)^2 + \frac{1}{6}F^{(3)}(1)(X-1)^3. \end{aligned}$$

On reconnaît la formule de Taylor.

3. On a donc $\mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3) = \mathbb{R}_3[X]$:
   — $P_0, \ldots, P_3 \in \mathbb{R}_3[X]$ et donc $\mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3) \subset \mathbb{R}_3[X]$;
   — on vient de voir que $\mathbb{R}_3[X] \subset \mathrm{Vect}(P_1, P_2, P_3)$.

   La famille $(P_0, \ldots, P_3)$ est génératrice de $\mathbb{R}_3[X]$.

2.2 Familles libres

Exercice 2. 1. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda_1(1, -1, 2) + \lambda_2(2, 1, -1) + \lambda_3(-1, -5, 8) = (0, 0, 0)$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & 5\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 8\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 3\lambda_2 & - & 6\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 8\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & \lambda_2 & = & 2\lambda_3 \\ \lambda_1 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & 6\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad L_2 \leftrightarrow L_1$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_2 & = & 2\lambda_3 \\ \lambda_1 & = & -3\lambda_3 \end{array} \right.$$

En prenant $\lambda_3 = 1$, $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 2$, on voit que

$$\lambda_1(1, -1, 2) + \lambda_2(2, 1, -1) + \lambda_3(-1, -5, 8) = (0, 0, 0).$$

Donc $\mathcal{F}$ est liée.

2. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\lambda_1(X^2{+}2X) + \lambda_2(X^2+X+1) + \lambda_3(X+2) = 0 \\
&\iff \lambda_2 + 2\lambda_3 + (2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)X + (\lambda_1+\lambda_2)X^2 = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccc} \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ -\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_1 & = & -\lambda_2 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} 3\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & \lambda_2 \\ \lambda_1 & = & -\lambda_2 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, la famille est libre.

3. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & & 2\lambda_2 & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

La famille est donc libre.

4. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1(2^n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_2(3^n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_3(4^n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda_1 2^n + \lambda_2 3^n + \lambda_3 4^n = 0 \\
&\implies \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 & (n=0) \\ 2\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & 4\lambda_3 & = & 0 & (n=0) \\ 4\lambda_1 & + & 9\lambda_2 & + & 16\lambda_3 & = & 0 & (n=2) \end{array} \right. \\
&\implies \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & 5\lambda_2 & + & 12\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\implies \left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & & + & \lambda_2 & = & -2\lambda_3 \\ & & -10\lambda_3 & + & 12\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\implies \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Donc $\mathcal{F}$ est une famille libre.

Correction de l'exercice 9. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = \lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{-kx} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x) = \lambda_0 f_0(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0.$$

On cherche à montrer que nécessairement, $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$. Supposons par l'absurde que $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ et considérons n_0 le plus petit entier de $\{0, \dots, n\}$ tel que $\lambda_{n_0} \neq 0$. Ainsi, pour tout $k < n_0$, $\lambda_k = 0$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{-kx} &= \sum_{k=n_0}^{n} \lambda_k e^{-kx} \quad \text{car, pour tout } k < n_0,\ \lambda_k = 0 \\
&= e^{-n_0 x} \sum_{k=n_0}^{n} \lambda_k e^{(n_0-k)x} \\
&= e^{-n_0 x} \left(\lambda_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \lambda_k e^{(n_0-k)x} \right).
\end{aligned}
$$

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{-kx} = 0$, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{-n_0 x} \left(\lambda_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \lambda_k e^{(n_0-k)x} \right) = 0.$$

Or , pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-n_0 x} \neq 0$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \lambda_k e^{(n_0-k)x} = 0.$$

De plus, pour $k \geq n_0 + 1$, $n_0 - k < 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{(n_0-k)x} = 0$. Donc, en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus on trouve :

$$0 = \lim_{x \to +\infty} \left(\lambda_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \lambda_k e^{(n_0-k)x} \right) = \lambda_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \lambda_k \lim_{x \to +\infty} e^{(n_0-k)x} = \lambda_{n_0}.$$

Cela est absurde car, par définition de n_0, $\lambda_{n_0} \neq 0$. Ainsi, notre supposition est fausse et donc $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$.
On a montré que

$$\forall (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k = 0 \Rightarrow \lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

La famille $(f_0, \ldots, f_n)$ est donc libre.

Correction de l'exercice 10. Soit E l'espace vectoriel des applications de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.
Soit f_1 et f_2 définies sur $]-1,1[$ par :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f_1(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{1}{1+x}.$$

1. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned}
\lambda f_1 + \mu f_2 = 0 &\iff \forall x \in]-1,1[\quad \frac{\lambda}{x-1} + \frac{\mu}{x+1} = 0 \\
&\iff \forall x \in]-1,1[\quad \frac{\lambda(x+1) + \mu(x-1)}{(x-1)(x+1)} = 0 \\
&\iff \forall x \in]-1,1[\quad \frac{(\lambda+\mu)x + \lambda - \mu}{(x-1)(x+1)} = 0 \\
&\iff \forall x \in]-1,1[\quad (\lambda+\mu)x + \lambda - \mu = 0 \\
&\iff \lambda + \mu = \lambda - \mu = 0 \\
&\iff \lambda = \mu = 0.
\end{aligned}$$

   Ainsi (f_1, f_2) est libre.

2. D'après les calculs ci-dessus, on a pour tout $\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\forall x \in]-1,1[\quad \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) = \frac{(\lambda+\mu)x + \lambda - \mu}{x^2 - 1}.$$

   Donc en prenant $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda - \mu = 1$ c'est-à-dire $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et $\mu = -\dfrac{1}{2}$ on a :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \lambda f_1(x) + \mu f_2(x) = \frac{1}{x^2-1}.$$

   Donc $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-1}$ appartient à $\mathrm{Vect}(f_1, f_2)$.

2.3 Bases

Correction de l'exercice 11.

1. • Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. On note $e_1 = (3,1,3)$, $e_2 = (2,2,1)$ et $e_3 = (4,3,2)$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$; on a :

$$
\begin{aligned}
&(x,y,z) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \\
\iff & \left\{\begin{array}{ccccccc} 3\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 4\lambda_3 & = & x \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & y \\ 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & z \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{ccccccc} 3\lambda_1 & + & \color{red}{2\lambda_2} & + & 4\lambda_3 & = & x \\ -2\lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & y-x \\ 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & z \end{array}\right. \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\
\iff & \left\{\begin{array}{ccccccc} 3\lambda_1 & + & \color{red}{2\lambda_2} & + & 4\lambda_3 & = & x \\ -2\lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & y-x \\ 3\lambda_1 & & & & & = & 2z-x \end{array}\right. \quad (L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1) \\
\iff & \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_2 & = & \dfrac{x-3\lambda_1-4\lambda_3}{2} \\ \lambda_3 & = & x-y-\lambda_1 \\ \lambda_1 & = & \dfrac{2z-x}{3} \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_2 & = & \dfrac{x-3\frac{2z-x}{3}-4\left(x-y-\frac{2z-x}{3}\right)}{2} \\ \lambda_3 & = & x-y-\dfrac{2z-x}{3} \\ \lambda_1 & = & \dfrac{2z-x}{3} \end{array}\right. \\
\iff & \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_2 & = & \dfrac{-7x+6y+5z}{3} \\ \lambda_3 & = & \dfrac{5x-3y-4z}{3} \\ \lambda_1 & = & \dfrac{2z-x}{3} \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Ainsi, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, (x,y,z) est combinaison linéaire de e_1, e_2 et e_3. Plus précisément, on a

$$
(x,y,z) = \frac{2z-x}{3} \cdot e_1 + \frac{-7x+6y+5z}{3} \cdot e_2 + \frac{5x-3y-4z}{3} \cdot e_3.
$$

La famille $\mathcal{B}$ est donc une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

• Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. En appliquant les calculs précédents avec $(x,y,z) = (0,0,0)$ on voit que

$$
(0,0,0) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \iff \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_2 & = & \dfrac{-7\times 0+6\times 0+5\times 0}{3} = 0 \\ \lambda_3 & = & \dfrac{5\times 0-3\times 0-4\times 0}{3} = 0 \\ \lambda_1 & = & \dfrac{2\times 0-0}{3} = 0 \end{array}\right.
$$

Ainsi la famille $\mathcal{B}$ est libre.

- La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base [1] de $\mathbb{R}^3$. De plus, d'après le premier point, on sait que les coordonnées d'un vecteur (x, y, z) dans cette base sont :

$$\left(\frac{2z-x}{3}, \frac{-7x+6y+5z}{3}, \frac{5x-3y-4z}{3}\right).$$

En particulier, les coordonnées de u dans cette base sont $(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$

2. - Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(x, y, z) = y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) + x(1, 0, 0).$$

La famille est donc génératrice de $\mathbb{R}^3$.

- Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\lambda_1(0, 1, 0) + \lambda_2(0, 0, 1) + \lambda_3(1, 0, 0) = (0, 0, 0) \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

La famille est donc libre.

- La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. De plus, d'après le premier point, on sait que les coordonnées d'un vecteur (x, y, z) dans cette base sont (y, z, x). En particulier, les coordonnées de u dans cette base sont $(2, 1, 3)$.

3. - Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$; on a :

$$\begin{aligned} P = \lambda_1 + \lambda_2(X-1) + \lambda_3(X-1)^2 &\iff P = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + (\lambda_2 - 2\lambda_3)X + \lambda_3X^2 \\ &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & a_0 \\ & & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & = & a_1 \\ & & & & \lambda_3 & = & a_2 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & a_0 + a_1 + a_2 \\ \lambda_2 & = & a_1 + 2a_2 \\ \lambda_3 & = & a_2 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, P est combinaison linéaire de 1, $X-1$ et $(X-1)^2$; plus précisément :

$$a_0 + a_1X + a_2X^2 = (a_0 + a_1 + a_2) \cdot 1 + (a_1 + 2a_2) \cdot (X-1) + a_2 \cdot (X-1)^2.$$

- La famille $\mathcal{B}$ est une famille échelonnée formée de vecteurs non nuls donc elle est libre.
- La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$. De plus, d'après le premier point, on sait que les coordonnées d'un polynôme $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ dans cette base sont $(a_0 + a_1 + a_2, a_1 + 2a_2, a_2)$. En particulier, les coordonnées de u dans cette base sont $(3, 3, 1)$.

1. On peut aussi montrer que $\mathcal{B}$ est libre et que $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. La même remarque vaut pour les questions suivantes.

4. • Montrons que $\mathcal{B}$ est génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$; on a :

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & x \\ \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & z \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & & & = & t \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{cccccccccl} \color{red}{\lambda_1} & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & x & \\ & - & \lambda_2 & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y-x & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & z & \\ & & & - & 2\lambda_3 & & & = & t-x & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{cccccccccl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & & & = & x & \\ & - & \color{red}{\lambda_2} & - & 2\lambda_3 & + & \lambda_4 & = & y-x & \\ & & & - & \lambda_3 & + & 2\lambda_4 & = & z+y-x & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ & & & - & 2\lambda_3 & & & = & t-x & \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & x - \lambda_2 - \lambda_3 \\ \lambda_2 & = & x - y - 2\lambda_3 + \lambda_4 \\ 2\lambda_4 & = & z + y - x + \lambda_3 \\ \lambda_3 & = & \dfrac{x-t}{2} \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & \dfrac{3x+2y-2z-t}{4} \\ \lambda_2 & = & \dfrac{-x-2y+2z+3t}{4} \\ \lambda_4 & = & \dfrac{2z+2y-x-t}{4} \\ \lambda_3 & = & \dfrac{x-t}{2} \end{array} \right.$$

Ainsi, pour tout $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.
La famille $\mathcal{B}$ est donc une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• Montrons que la famille $\mathcal{B}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$. En appliquant les calculs précédents avec $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on voit que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

Ainsi la famille $\mathcal{B}$ est libre.

• La famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est donc une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, d'après le premier point, on sait que les coordonnées d'un vecteur

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ dans cette base sont :

$$\left(\frac{3x+2y-2z-t}{4}, \frac{-x-2y+2z+3t}{4}, \frac{x-t}{2}, \frac{2z+2y-x-t}{4}\right).$$

En particulier, les coordonnées de u dans cette base sont $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$.

Correction de l'exercice 12.

1. Soit $F = \{(x+y, y+z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$. On a

$$\begin{aligned} F = \{(x+y, y+z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} &= \{x(1,0) + y(1,1) + z(0,1) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,0), (1,1), (0,1)) \\ &= \mathrm{Vect}((1,0), (0,1)) \end{aligned}$$

car $(1,1) = (1,0) + (0,1)$. Donc $((1,0), (0,1))$ est une famille génératrice de F. De plus la famille $((1,0), (0,1))$ est formée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre.
C'est donc une base de $\{(x+y, y+z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

2. Posons $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - t = 0 \quad \text{et} \quad y = t\}$. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$(x,y,z,t) \in F \iff 2x + y - t = 0 \quad \text{et} \quad y = t \iff x = 0 \quad \text{et} \quad y = t.$$

Ainsi :

$$F = \{(0, y, z, y) \ ; \ y, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((0,1,0,1), (0,0,1,0)).$$

La famille $((0,1,0,1), (0,0,1,0))$ est donc génératrice de F.
Elle est formée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre.
Ainsi c'est une base de F.

3. Notons $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(1)\}$. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 in \mathbb{R}_3[X]$.
On a :

$$P(0) = a_0 \quad \text{et} \quad P'(1) = a_1 + 2a_2 + 3a_3$$

donc :

$$\begin{aligned} P \in F &\iff a_0 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 \\ &\iff P = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \\ &\iff P = a_1(1+X) + a_2(2+X^2) + a_3(3+X^3) \\ &\iff P \in \mathrm{Vect}(1+X, 2+X^2, 3+X^3). \end{aligned}$$

Donc $F = \mathrm{Vect}(1+X, 2+X^2, 3+X^3)$ et la famille $(1+X, 2+X^2, 3+X^3)$ est génératrice de F.
Il s'agit d'une famille échelonnée de polynômes non nuls donc elle est libre.
Ainsi $(1+X, 2+X^2, 3+X^3)$ est une base de F.

4. Notons $F = \left\{(a+c)X + (2aX+b)X^2 - cX^2 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.
On a :
$$\begin{aligned} F &= \left\{(a+c)X + (2aX+b)X^2 - cX^2 \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{a(X+2X^3) + cX + bX^2 + c(X-X^2) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \mathrm{Vect}(X+2X^3,^2, X-X^2). \end{aligned}$$
La famille $(X+2X^3,^2, X-X^2)$ est donc génératrice de F.
Étudions sa liberté : soit $a,b,c \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned} & a(X+2X^3) + cX + bX^2 + c(X-X^2) = 0 \\ \iff & \left\{\begin{array}{rcl} a+c &=& 0 \\ b-c &=& 0 \\ 2a &=& 0 \end{array}\right. \quad \text{(en identifiant les coefficients en } X,\ X^2, X^3\text{)} \\ \iff & \left\{\begin{array}{rcl} c &=& 0 \\ b &=& 0 \\ a &=& 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$
Donc la famille est aussi libre.
Ainsi $(X+2X^3,^2, X-X^2)$ est une base de F.

5. Soit $F = \left\{\begin{pmatrix} a & a+b & 0 \\ 2a+b & -b & 3a+2b \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R}\right\}$.
On a
$$\begin{aligned} F &= \left\{\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ 2a & 0 & 3a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b & -b & 2b \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$
Ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de F.
Elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre.
Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de F.

6. Notons $F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a+b = c+d\right\}$. Alors :
$$\begin{aligned} F &= \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a = -b+c+d\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} -b+c+d & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ ;\ (b,c,d) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} -b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ ;\ (b,c,d) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{b\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ ;\ (b,c,d) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est donc une famille génératrice de F.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
\iff &\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0\\ \lambda_1 & & & & & = & 0\\ & & \lambda_2 & & & = & 0\\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.\\
\iff &\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0\\ \lambda_2 & = & 0\\ \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ est libre.
C'est une famille libre et génératrice de F donc une base de F.

Correction de l'exercice 13. Soit $n \geq 2$ et $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

1. (a) H est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ non vide car $(0, \dots, 0) \in H$.
   (b) Montrons que H est stable par combinaison linéaire. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux éléments de H et $\lambda \in \mathbb{R}$ et montrons que $x + \lambda y \in H$.
   On sait que $x_1 + \cdots + x_n = 0$ car $x \in H$ et $y_1 + \cdots + y_n = 0$ car $y \in H$. Par conséquent,
   $$\begin{aligned}(x_1 + \lambda y_1) + \cdots + (x_n + \lambda y_n) &= x_1 + \cdots + x_n + \lambda(y_1 + \cdots + y_n)\\ &= 0.\end{aligned}$$
   Ainsi $x + \lambda y \in H$.
   Cela montre que pour tout $x, y \in H$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $x + \lambda y \in H$. Ainsi H est stable par combinaison linéaire.
   (c) D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, on en conclut que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Pour $i = 2, \dots, n$, on note $f_i = e_1 - e_i$.
   (a) Pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, $f_i = (1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$ où le -1 est un $i^{\text{ième}}$ position. Comme
   $$1 + 0 + \cdots + 0 - 1 + 0 \cdots + 0 = 0$$
   alors $f_i \in H$ pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$.
   (b) Montrons que $(f_2, \dots, f_n)$ est libre. Soit $(\lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.
   $$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} \lambda_k f_k = 0 &\iff \sum_{k=2}^{n} \lambda_k (e_1 - e_k) = 0\\ &\iff \left(\sum_{k=2}^{n} \lambda_k\right) e_1 - \sum_{k=2}^{n} \lambda_k e_k = 0\\ &\iff \left(\sum_{k=2}^{n} \lambda_k\right) = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0 \quad \text{car } (e_1, \dots, e_n) \text{ est libre}\end{aligned}$$
   Ainsi, la famille $(f_2, \dots, f_n)$ est libre.

(c) Montrons que $(f_2, \dots, f_n)$ est génératrice de H.

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in H$ alors $x_1 + \cdots + x_n = 0$ c'est-à-dire $x_1 = -\sum_{i=2}^{n} x_i$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}
x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i &= x_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i e_i \\
&= \left(-\sum_{i=2}^{n} x_i\right) e_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i e_i \\
&= -\sum_{i=2}^{n} x_i e_i + \sum_{i=2}^{n} x_i e_i \\
&= \sum_{i=2}^{n} x_i (e_i - e_1) \\
&= \sum_{i=2}^{n} (-x_i) f_i.
\end{aligned}$$

Donc la famille $(f_2, \dots, f_n)$ est bien génératrice de H.

Par ce qui précède, la famille $(f_2, \dots, f_n)$ est donc une base de H.