Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

TP Python – 3

Simulation de variables aléatoires discrètes

L'objet de ce TP est essentiellement de mettre en place une méthodologie pour effectuer des simulations probabilistes.

On se donne un espace probabilisé [1] $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Les fonctions Python de tirage au sort que nous allons rencontrer sont des modèles de variables aléatoires au sens où chaque appel à l'une de ces fonctions équivaut à tirer au sort, **indépendamment** des tirages précédents, un nombre flottant, suivant une loi donnée.

Pour ce TP, nous aurons besoin d'importer le module `numpy.random` sous l'alias `rd` :

```
import numpy.random as rd
```

La fonction de tirage au sort fondamentale que nous utiliserons est la commande `rd.rand()` qui tire un nombre au hasard **uniformément** dans l'intervalle $[0,1[$ [2].
Cela signifie que pour tout intervalle I contenu dans $[0,1[$,

$$\mathbb{P}(\texttt{rd.rand()} \in I) = \text{longueur}(I).$$

Pour tirer un nombre au hasard, Python dispose de plusieurs fonctions qui diffèrent essentiellement par la *loi* du nombre aléatoire retourné.
Le programme du concours cependant impose que vous sachiez simuler des v.a. suivant des lois classiques à partir d'une variable uniforme sur $[0,1[$. De toutes ces belles fonctions `numpy` qui simulent des lois classiques ou beaucoup plus exotiques, vous n'avez donc le droit, dans un premier temps, de n'en utiliser qu'une : `rd.rand()`.

1 Simulation des lois classiques

1.1 Simulation de lois de Bernoulli et de lois binomiales

Le but de cette partie est de simuler des variables suivant une loi de Bernoulli ou binomiale seulement en utilisant `rd.rand()`. On considère le script suivant :

```
# Bernoulli manuelle

def Bernoulli ( p ):
""" Entrée : un réel p dans ]0,1[
          Sortie : 1 avec proba p et 0 avec proba 1-p
"""
    u = rd.rand()
    .....
return .....
```

1. On verra la définition dans le cours de mathématiques.
2. On verra la définition dans le cours de mathématiques.

Travail demandé

1. (a) Rappeler la définition d'une variable aléatoire X suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
   (b) Compléter le script ci-dessus pour qu'il simule une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
2. (a) Rappeler la définition d'une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in]0,1[$.
   (b) Quel lien existe-t-il entre un loi $\mathcal{B}(p)$ et une loi $\mathcal{B}(n,p)$?
   (c) Écrire une fonction Python `binomiale(n,p)` prenant en entrées un entier naturel `n` et un réel `p`$\in]0,1[$ et simulant une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,p)$.
3. (a) Écrire une fonction `Rep_binomiale(N,n,p)` prenant en entrées des entiers naturels `N`, `n` et un réel `p`$\in]0,1[$ et simulant N variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(n,p)$.
   On demande à ce que la fonction renvoie la liste des `N` valeurs des binomiales, la moyenne des valeurs de cette liste ainsi que sa variance.
   (b) Tester avec $N = 10000$, $p = 0.3$ et $n = 11$ et comparer la moyenne et variance obtenue avec l'espérance et la variance du loi $\mathcal{B}(n,p)$.

Le script suivant affiche l'histogramme des fréquences des valeurs prises lors de 10 000 simulations d'une $\mathcal{B}(11, 0.3)$:

```
N = 10000
p = 0.3
n = 11

# Affichage histogramme des fréquences
plt.hist(Rep_binomiale(N,n,p)[0],density = True,rwidth = 0.5)
```

4. (a) Recopier le script ci-dessus.
   (b) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(11, 0.3)$. Tracer, sur la même fenêtre graphique que l'histogramme, la représentation graphique de $(\mathbb{P}(X = k))_{k \in [\![0,11]\!]}$.
   (c) Commenter.

1.2 Simulation d'une loi uniforme discrète

Le but de cette partie est de simuler une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$, $n \in \mathbb{N}^*$.
On rappelle que si x est un réel positif, sa partie entière, notée $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier tel que :

$$n \leq x < n + 1.$$

Travail demandé

1. Rappeler la définition d'une variable aléatoire X suivant une loi de uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$, $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit x un nombre tiré au hasard dans $[0,1[$ avec la commande `rd.rand()`.

(a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\lfloor nx \rfloor = k \iff \frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}.$$

(b) En déduire, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}(\lfloor n * \texttt{rd.rand()} \rfloor = k)$.

(c) Écrire une fonction `Uniforme(n)` qui prend en entrée un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et simule une variable de loi uniforme sur $[\![0, n-1]\!]$.

*Indication : la fonction **`np.floor`** donne la partie entière d'un nombre réel et la fonction **`int`** transforme un **`float`** en **`int`**.*

3. Utiliser la fonction précédente pour tracer l'histogramme d'une suite de `N = 1000` tirages uniformément en 0 et 9.

1.3 Variables aléatoires discrètes finies

Travail demandé

1. Écrire une fonction `VaDiscrete(p)` où `p` est une liste de `float` positifs dont la somme vaut 1 et retournant un nombre entier (un `int` donc) entre 0 et `len(p)-1` tiré suivant la loi décrite par `p` c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(\texttt{VaDiscrete(p)} = k) = \texttt{p[k]}.$$

2. Écrire un bloc de code calculant une liste de `N = 10000` nombres tirés suivant la loi `p=[0.1,0.2,0.4,0.3]` et afficher l'histogramme de cette liste.
3. Donner la moyenne et la variance de cette liste. Faire imprimer ces nombres ainsi que les valeurs théoriques de l'espérance et de la variance de la variable `VaDiscrete(p)`.

2 Vers la loi géométrique

On considère une urne contenant $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à n indiscernables au toucher.
On tire uniformément avec remise dans l'urne (une infinité de fois).
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire donnant le numéro du tirage où on obtient la boule numéro i pour la première fois[3].

Travail demandé

1. Écrire une fonction `Geometrique(n,i)` qui prend en entrées un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un entier $i \in [\![1, n]\!]$ et qui simule la variable X_i.
2. Écrire un bloc de code donnant la liste des résultats de `N = 1000` simulation de X_1 pour $n = 3, n = 10$, $n = 5$.
3. Donner la moyenne et la variance de cette liste. Que peut-on conjecturer sur $\mathbb{E}(X_1)$?

3. On verra un peu plus tard que X_i suit une loi dite géométrique.