Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

TP4 Python

Équations différentielles

L'objet de ce TP est de mettre en œuvre la méthode d'Euler sur différents exemples d'équations différentielles.
Ce TP prendra 2 séances.

1 Modèle de Gompertz

On considère le problème de Cauchy suivant sur $\mathbb{R}_+$:

$$(G) \qquad y' = ay\ln\left(\frac{\kappa}{y}\right) \quad \text{et} \quad y(0) = y_0$$

où a, κ sont des réels strictement positifs et $y_0 > 0$.
On rappelle[1] que l'unique solution y de (G) est donnée par :

$$\forall t \geq 0, \quad y(t) = \kappa e^{\ln\left(\frac{y_0}{\kappa}\right)e^{-at}}.$$

On se propose de déterminer numériquement une valeur approchée de y sur un segment $[0, T]$ $(T > 0)$ par deux méthodes.

1.1 Méthode d'Euler

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{T}{n} a y_k \ln\left(\frac{\kappa}{y_k}\right).$$

Travail demandé

1. Définir des variables `a` et `kappa` initialisées avec les valeurs 0.036 et 760 respectivement.
2. Écrire une fonction `Euler` prenant en entrées y_0, T et n et renvoyant la suite $(y_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ obtenue par la méthode d'Euler.
3. Tracer la suite de points $\left(\left(k\frac{T}{n}, y_k\right)\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ pour $y_0 = 16$, $T = 200$ et $n = 1000$.
4. Tracer sur le même graphique, la solution exacte et comparer les résultats.
5. On considère le tableau suivant[2] qui donne l'évolution de la masse m d'un rat musqué (en grammes) en fonction de son âge t (en jours) :
   Représenter graphiquement la masse en fonction de l'âge sur le même graphique que le précédent. Que constate-on ?

1. Voir l'exercice 7 du TD4 et son corrigé.
2. *Utilisation et interprétation du modèle de Gompertz, application à l'étude de la croissance de jeunes rats musqués*, A.Pave, A.Corman, B.Bobillier-Monot

T en jours	0	21	29	35	44	50	55	62	69	76	83	90	97
m en gramme	16	116	175	264	352	416	447	503	540	573	603	646	684

T en jours	104	110	117	124	132	138	146	152	180	187	194	201
m en gramme	688	695	712	739	728	747	733	738	763	757	765	767

Table 1 – Évolution de la masse en fonction de l'âge

1.2 Méthode de Heun

La méthode d'Euler utilise la valeur de la dérivée à l'extrémité inférieure de l'intervalle $\left[k\frac{T}{n}, (k+1)\frac{T}{n}\right]$ pour estimer la pente de la courbe sur l'intervalle.
La méthode de Heun tente d'améliorer cette estimation de pente en calculant la pente de la tangente à l'autre extrémité de l'intervalle, que l'on estime à l'aide de la méthode d'Euler, et en faisant la moyenne des pentes obtenues.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$z_{k+1} = y_k + \frac{T}{n} a y_k \ln\left(\frac{\kappa}{y_k}\right) \quad \text{puis} \quad y_{k+1} = y_k + \frac{T}{2n}\left(a y_k \ln\left(\frac{\kappa}{y_k}\right) + a z_{k+1} \ln\left(\frac{\kappa}{z_{k+1}}\right)\right).$$

Travail demandé

1. Écrire une fonction `Heun` prenant en entrées y_0, T et n et renvoyant la suite $(y_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ obtenue par la méthode de Heun.
2. Tracer la suite de points $\left(\left(k\frac{T}{n}, y_k\right)\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ pour $y_0 = 16$, $T = 200$ et $n = 1$, 5, 10 et 100.
3. Tracer sur le même graphique, la solution exacte et comparer les résultats.

1.3 Comparaison des méthodes

Que ce soit pour la méthode d'Euler ou la méthode de Heun, l'erreur commise par la méthode avec n subdivisions sur $[0, T]$ est définie par :

$$e_n(T) = \max\left\{ |y_k - y\left(k\frac{T}{n}\right)| \;;\; k \in [\![0, n]\!] \right\}.$$

On dit que la méthode converge lorsque, à T fixé, l'erreur tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Travail demandé

1. Écrire une fonction `Erreur` prenant en entrées `T`, `y0` et `n` et renvoyant la valeur de $e_n(T)$ pour les deux méthodes.
2. **Convergence des méthodes**.

   (a) Pour $T = 200$ et $y_0 = 16$ tracer le graphique de l'erreur en fonction du nombre de subdivisions $n \in [\![1, 100]\!]$ pour les deux méthodes.
   (b) Que peut-on en conclure ?
3. **Erreur à pas constant.**
   (a) Pour $n = 100$ et $y_0 = 16$ tracer le graphique de l'erreur en fonction de la taille $T \in [1, 50]$ de l'intervalle pour les deux méthodes.
   (b) Quelle méthode semble la plus efficace ?

2 Modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

Soit a, b, c, d des réels strictement positifs.
On considère le système différentiel [3] ci-dessous où x et y désignent respectivement l'effectif d'une population de proies et l'effectif d'une population de prédateurs en fonction de $t \in \mathbb{R}_+$.
Enfin, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ désigne les effectifs relevés à un instant $t_0 \in \mathbb{R}_+$.
On admet, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}_+$ et tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ l'**existence d'un unique couple** (x, y) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant :

$$(S) \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & (a - by(t))x(t) \\ y'(t) & = & (cx(t) - d)y(t) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right.$$

On note $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \varphi(x, y) = cx - d\ln(x) + by - a\ln(y).$$

On rappelle [4] que si x_0 et y_0 sont strictement positifs alors l'unique couple solution (x, y) vérifie la propriété (P_1) suivante :

$$(P_1) \qquad \forall t \geq 0, \quad \varphi(x(t), y(t)) = \varphi(x_0, y_0).$$

On admet également que les solutions sont périodiques et on note ρ la période. Ainsi, (x, y) vérifie la propriété (P_2) suivante :

$$(P_2) \qquad \forall t \geq 0, \quad (x(t + \rho), y(t + \rho)) = (x(t), y(t)).$$

On se propose de déterminer numériquement une valeur approchée d'un couple solution (x, y) sur un segment $[0, T]$ $(T > 0)$ par les méthodes d'Euler et de Heun.

Dans la suite, on prendra $a = b = c = 1$ et $d = 2$.

2.1 Méthode d'Euler

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, à partir de la condition initiale $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on construit deux suites $(x_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ et $(y_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ définies par :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & x_k + \dfrac{T}{n} x_k(a - by_k) \\ \\ y_{k+1} & = & y_k + \dfrac{T}{n} y_k(cx_k - d) \end{array} \right.$$

3. Voir le DS2.
4. Voir le DS2.

Travail demandé

1. Écrire une fonction `Euler_syst` prenant en entrées x_0, y_0, T et n et renvoyant les suites $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et $(y_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ obtenues par la méthode d'Euler.
2. Tracer les suites de points $\left(\left(k\frac{T}{n}, x_k\right)\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$, $\left(\left(k\frac{T}{n}, y_k\right)\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ pour $x_0 = 1$, $y_0 = 0.5$, $T = 20$ et $n = 1000$.
3. (a) Tracer la suite de points $\left(\left(k\frac{T}{n}, \varphi(x_k, y_k)\right)\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$.
   (b) Comparer le résultat obtenu avec la propriété (P_1) attendue en théorie.
4. (a) Tracer la représentation graphique de (y_k) en fonction de (x_k).
   (b) Comparer le résultat obtenu avec la propriété (P_2) attendue en théorie.

2.2 Méthode de Heun

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, à partir de la condition initiale $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on construit deux suites $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et $(y_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ définies pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ par :

$$\begin{cases} x_{k+1}^* &= x_k + \dfrac{T}{n} x_k(a - by_k) \\ y_{k+1}^* &= y_k + \dfrac{T}{n} y_k(cx_k - d) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{k+1} &= x_k + \dfrac{T}{2n}(x_k(a - by_k) + x_{k+1}^*(a - by_{k+1}^*)) \\ y_{k+1} &= y_k + \dfrac{T}{2n}(y_k(cx_k - d) + y_{k+1}^*(cx_{k+1}^* - d)) \end{cases}$$

Travail demandé

1. Écrire une fonction `Heun_syst` prenant en entrées x_0, y_0, T et n et renvoyant les suites $(x_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et $(y_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ obtenues par la méthode de Heun.
2. Tracer les suites de points $\left(\left(k\frac{T}{n}, x_k\right)\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$, $\left(\left(k\frac{T}{n}, y_k\right)\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ pour $x_0 = 1$, $y_0 = 0.5$, $T = 20$ et $n = 1000$.
3. (a) Tracer la suite de points $\left(\left(k\frac{T}{n}, \varphi(x_k, y_k)\right)\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$.
   Indication : pour mieux se rendre compte, on pourra ajouter la commande suivante juste avant `plt.show()` *:*
   ```
   plt.ylim([2.19, 2.2])
   ```
   (b) Comparer le résultat obtenu avec la propriété (P_1) attendue en théorie.
4. (a) Tracer la représentation graphique de (y_k) en fonction de (x_k).
   (b) Comparer le résultat obtenu avec la propriété (P_2) attendue en théorie.

3 Pendule pesant

On considère le système mécanique décrit en figure 1 composé d'une masse m suspendue à un fil rigide de longueur ℓ. La variable d'intérêt est l'angle θ que fait le fil avec la verticale et l'on cherche à décrire son évolution en fonction du temps t sachant qu'à un instant $t = t_0$ (on peut prendre $t_0 = 0$ pour fixer les idées) on a pour conditions initiales (position et vitesse angulaire initiales) :

$$\theta(t_0) = \theta_0 \quad , \quad \frac{d\theta}{dt}(t_0) = \omega_0.$$

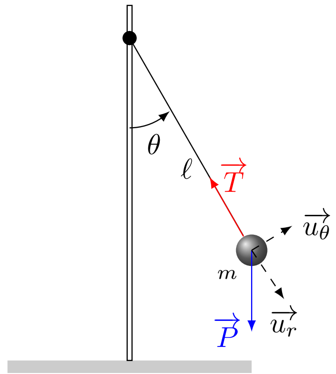

FIGURE 1 – Le pendule pesant

La masse étant soumise à son poids et à la tension du fil rigide, le principe fondamental de la dynamique habilement projeté sur la direction tangentielle au mouvement se traduit en l'équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \qquad (\star)$$

En posant

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \text{ (la vitesse angulaire)} \quad \text{et} \quad X = \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix} \quad ; \quad F(X) = \begin{pmatrix} \omega \\ -\frac{g}{\ell}\sin\theta \end{pmatrix},$$

on transforme l'équation $(\star)$ du second ordre en une équation vectorielle (un système d'équations scalaires) du premier ordre :

$$\frac{dX}{dt} = F(X).$$

3.1 Méthode d'Euler

L'équation $(\star)$ mise sous cette forme, avec des conditions initiales adéquates, peut être résolue approximativement sur un segment $[t_0, T]$ par un schéma d'Euler en considérant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la suite $(Y_k)_{[\![0,n]\!]}$ définie par :

$$Y_0 = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad Y_{k+1} = Y_k + \frac{T - t_0}{n} F(Y_k).$$

Travail demandé

1. Programmer la méthode d'Euler pour le pendule pesant avec $g = 9.80665$ et $\ell = 0.3$.
2. Tracer la courbe $(t, \theta(t))$ pour $t \in [0, T]$ avec $(\theta_0, \omega_0) = (0, 8)$ et $n = 1000$.
3. Que constate-on ? Est-ce cohérent ?

3.2 Énergie conservée

Si on pose $X = (\theta, \omega)$ alors l'énergie mécanique totale du système est (à un facteur constant $m\ell^2$ près) :

$$E(X) = E(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{g}{\ell}(1 - \cos(\theta)). \tag{E}$$

D'après la loi de conservation de l'énergie, pour $t \mapsto X(t)$ une solution de $(\star)$ sur un intervalle temporel I la fonction $t \mapsto E(X(t))$ est constante sur I.
La trajectoire de la courbe $t \mapsto X(t) = (\theta(t), \omega(t))$ est donc contenue dans une courbe de niveau de la fonction E, la courbe de niveau correspondant au niveau initial $E_0 = E(\theta_0, \omega_0)$.
La formule de l'énergie est réglée de sorte que cette énergie soit toujours positive et que la position d'équilibre stable $(\theta_*, \omega_*) = (0, 0)$ soit d'énergie $E(0, 0) = 0$.
La position d'équilibre instable est $(\theta^*, \omega^*) = (\pi, 0)$ et l'énergie de cette position est $E^* = 2\frac{g}{\ell}$.

Travail demandé

1. Vérifier que l'énergie $t \mapsto E(X(t))$ est bien constante.
2. Écrire une fonction `energie` prenant en entrées des flottant θ et ω et renvoyant $E(\theta, \omega)$.
3. En reprenant les mêmes valeurs qu'au paragraphe précédent, tracer la courbe $(t, E(\theta(t), \omega(t))$ où $t \mapsto (\theta(t), \omega(t))$ est la valeur approchée obtenue par la méthode d'Euler.
4. Que constate-on ? Est-ce cohérent ?
5. (a) En s'inspirant des parties précédentes, proposer une autre méthode numérique qui pourrait être meilleure.
   (b) Programmer cette méthode et comparer les courbes obtenues.