Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD6

Dimension

Correction de l'exercice 1.

1. On montre comme dans le TD précédent que $\mathcal{B}$ est libre (ou génératrice).
   C'est une famille libre de $\mathbb{R}^3$, de cardinal 3. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
2. On montre comme dans le TD précédent que $\mathcal{B}$ est libre (ou génératrice).
   C'est une famille libre de $\mathbb{R}^3$, de cardinal 3. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.
3. La famille $\mathcal{B}$ est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés ; elle est donc libre.
   C'est une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$, de cardinal 3. Comme $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. On montre comme dans le TD précédent que $\mathcal{B}$ est libre (ou génératrice).
   C'est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de cardinal 4. Comme $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$, c'est donc une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice 2. Montrons que la famille

$$\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right)$$

est libre.
Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ des scalaires. On a :

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix} + \lambda_4\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{ccc}\lambda_1 - \lambda_2 & = & 0\\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 & = & 0\\ \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 & = & 0\\ -\lambda_3 + \lambda_4 & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccc}\lambda_1 - \lambda_2 & = & 0\\ -\lambda_3 & = & 0\\ \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 & = & 0\\ -\lambda_3 + \lambda_4 & = & 0\end{array}\right. \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1)$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccc}\lambda_1 & = & 0\\ \lambda_3 & = & 0\\ \lambda_2 & = & 0\\ \lambda_4 & = & 0\end{array}\right.$$

La famille est donc libre.
C'est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ composée de 4 vecteurs et $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{K})) = 4$; c'est donc une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Correction de l'exercice 3. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose :

$$g_1 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{2x} \quad ; \quad g_2 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x}\cos(x\sqrt{3}) \quad ; \quad g_3 : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x}\sin(x\sqrt{3}).$$

Déterminer une base de $F = \text{Vect}(g_1, g_2, g_3)$.
On sait déjà que (g_1, g_2, g_3) est un famille génératrice de F.
Étudions sa liberté. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 = 0_E &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 e^{2x} + \lambda_2 e^{-x}\cos(x\sqrt{3}) + \lambda_3 e^{-x}\sin(x\sqrt{3}) = 0 \\
&\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 e^{-3x}\cos(x\sqrt{3}) + \lambda_3 e^{-3x}\sin(x\sqrt{3}) = 0.
\end{aligned}$$

Or, d'après le théorème des gendarmes, on voit que

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-3x}\cos(x\sqrt{3}) = \lim_{x\to+\infty} e^{-3x}\sin(x\sqrt{3}) = 0.$$

On en déduit donc, en faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'égalité précédente :

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 = 0_E \Longrightarrow \left(\lambda_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_2 e^{-3x}\cos(x\sqrt{3}) + \lambda_3 e^{-3x}\sin(x\sqrt{3}) = 0\right).$$

Puis en considérant $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}$ on obtient :

$$\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3 = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{et} \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

La famille est donc libre.
La famille (g_1, g_2, g_3) est libre et génératrice de F donc c'est une base de F.
En particulier F est de dimension 3.

Correction de l'exercice 4. Dans $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques et $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in E$. Alors :

$$A \in \mathcal{A}_3(\mathbb{R}) \iff {}^t A = -A \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -a \\ b &=& -d \\ c &=& -g \\ e &=& -e \\ f &=& -h \\ i &=& -i \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ b &=& -d \\ c &=& -g \\ e &=& 0 \\ f &=& -h \\ i &=& 0 \end{array}\right.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_3(\mathbb{R}) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad b, c, f \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad b, c, f \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
Étudions sa liberté. Soit $b, c, f \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$b\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\end{pmatrix}=0_E \iff \begin{pmatrix}0 & b & c\\-b & 0 & f\\-c & -f & 0\end{pmatrix}=0_E$$
$$\iff b=c=f=0.$$

La famille est donc libre.
C'est une famille libre et génératrice de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ donc

$$\left(\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\-1 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\end{pmatrix}\right)$$

est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.
En particulier $\dim\left(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})\right)=3$.

2. Soit $A=\begin{pmatrix}a & b & c\\d & e & f\\g & h & i\end{pmatrix}\in E$. Alors :

$$A\in\mathcal{S}_3(\mathbb{R})\iff^t A=A\iff\begin{cases}a & = & a\\b & = & d\\c & = & g\\e & = & e\\f & = & h\\i & = & i\end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) &= \left\{\begin{pmatrix}a & b & c\\b & e & f\\c & f & i\end{pmatrix}\quad;\quad b,c,f\in\mathbb{R}\right\}\\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right).\end{aligned}$$

La famille

$$\left(\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

est une famille génératrice de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

Étudions sa liberté. Soit $a, e, i, b, c, f \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$b\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+f\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+e\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=0_E$$

$$\iff \begin{pmatrix}a&b&c\\b&e&f\\c&f&i\end{pmatrix}=0_E$$

$$\iff a=i=e=b=c=f=0.$$

La famille est donc libre.
C'est une famille libre et génératrice de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ donc

$$\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)$$

est une base de $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
En particulier $\dim(\mathcal{S}_3(\mathbb{R}))=6$.

Correction de l'exercice 5 (Polynômes interpolateurs de Lagrange). Soient $z_0, \dots, z_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) des nombres complexes distincts. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$ on pose :

$$L_j = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{X-z_k}{z_j-z_k}.$$

1. Soient $j \in [\![0, n]\!]$ et $k \in [\![0, n]\!]$.
   Si $k \neq j$ alors dans le produit définissant L_j le k-ième terme s'annule en z_k donc : $L_j(z_k) = 0$.
   Si $k = j$ alors : $L_j(z_j) = \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \frac{z_j-z_k}{z_j-z_k} = 1.$
2. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Si on pose

$$Q = \sum_{j=0}^{n} P(z_j)L_j \in \mathrm{Vect}(L_0, \dots, L_n)$$

alors on remarque avec la question précédente que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$Q(z_k) = \sum_{j=0}^{n} P(z_j)L_j(z_k) = \sum_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n} P(z_j)L_j(z_k) + P(Z_k)L_k(z_k) = 0 + P(z_k)\times 1 = P(z_k).$$

Ainsi le polynôme $P-Q$ est de degré au plus n (car P et les L_j le sont) et possède $(n+1)$ racines (à savoir $z_0, \dots, z_n$). C'est donc le polynôme nul et ainsi :

$$P = Q = \sum_{j=0}^{n} P(z_j)L_j \in \mathrm{Vect}(L_0, \dots, L_n).$$

Cela montre que $\mathbb{C}_n[X] \subset \mathrm{Vect}(L_0, \dots, L_n)$.
L'inclusion réciproque est évidente car les L_j sont de degré au plus n. Donc :

$$\mathbb{C}_n[X] \subset \mathrm{Vect}(L_0, \dots, L_n).$$

Ainsi $(L_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}_n[X]$.

3. C'est une famille génératrice de $\mathbb{C}_n[X]$ de $(n+1)$ vecteurs et $\dim(\mathbb{C}_n[X]) = n+1$.
Par conséquent, c'est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
La question précédent montre que les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ dans cette base sont $(P(z_0), \dots, P(z_n))$.

Correction de l'exercice 6. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs :

$$v_1 = (1, -1, 2, 0)\ ;\ v_2 = (0, 2, 1, 1)\ ;\ v_3 = (1, 1, 3, 1)\ ;\ v_4 = (2, 0, 5, 1).$$

1. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On a les équivalence suivantes :

$$\begin{aligned}
av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4 = 0_{\mathbb{R}^4} &\iff \begin{cases} a+c+2d &= 0 \\ -a+2b+c &= 0 \\ 2a+b+3c+5d &= 0 \\ b+c+d &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a+c+2d &= 0 & \\ 2b+2c+2d &= 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\ b+c+d &= 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1) \\ b+c+d &= 0 & \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a &= -c-2d \\ b &= -c-d \end{cases}
\end{aligned}$$

En prenant par exemple $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$ et $d = 0$ on obtient :

$$-v_1 - v_2 + v_3 = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

La famille $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est liée.

2. D'après ce qui précède, on a : $v_1 = v_3 - v_2$ donc :

$$E = \mathrm{Vect}(v_2, v_3, v_4).$$

On a aussi en prenant $c = -2$, $d = 1$, $a = 0$ et $b = 1$:

$$v_2 - 2v_3 + v_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$$

donc : $v_2 = 2v_3 - v_4$. On en déduit alors :

$$E = \mathrm{Vect}(v_2, v_3, v_4) = \mathrm{Vect}(v_3, v_4).$$

Enfin les vecteurs v_4 et v_3 n'étant pas colinéaires, la famille (v_3, v_4) est libre.
Donc finalement (v_3, v_4) est une base de $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et E est de dimension 2.

Correction de l'exercice 7. Dans $\mathbb{R}_2[X]$ on considère la famille :

$$\mathcal{F} = (1 + X + X^2, 1, X + X^2, X^2).$$

1. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ et soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$P = \lambda_1(1 + X + X^2) + \lambda_2 + \lambda_3(X + X^2) + \lambda_4 X^2 \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & a_0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 & = & a_1 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & a_2 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_2 & = & a_0 - \lambda_1 \\ \lambda_3 & = & a_1 - \lambda_1 \\ \lambda_4 & = & a_2 - a_1 \end{array}\right.$$

En particulier, en prenant $\lambda_1 = 0$ on a :

$$P = a_0 + a_1(X + X^2) + (a_2 - a_1)X^2 \in \text{Vect}(\mathcal{F}).$$

Donc $\mathbb{R}_2[X] \subset \text{Vect}(\mathcal{F})$. L'inclusion réciproque étant facile, on a bien :

$$\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(\mathcal{F}).$$

La famille $\mathcal{F}$ est donc génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. La famille n'est pas libre car elle contient quatre vecteurs et $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$.
On remarque que $1 + X + X^2 = 1 + (X + X^2)$ donc :

$$\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1, X + X^2, X^2).$$

La famille $(1, X + X^2, X^2)$ est encore génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Cette fois, elle est de cardinal 3 et $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$.
Donc $(1, X + X^2, X^2)$ une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Correction de l'exercice 8.

1. Il s'agit d'une famille de deux vecteurs non colinéaires ; elle est donc libre.
Pour compléter en une base, il suffit d'ajouter à la famille un troisième vecteur $v_3 \notin \text{Vect}(v_1, v_2)$: la famille (v_1, v_2, v_3) sera alors encore libre et donc une base pour une raison de dimension.
On peut procéder par tâtonnement et voir que $(1, 0, 0) \notin \text{Vect}(v_1, v_2)$ puis que $(v_1, v_2, (1, 0, 0))$ est bien libre.
Sinon, on peut caractériser $\text{Vect}(v_1, v_2)$ par un système d'équation. Il sera alors facile de trouver un vecteur n'y appartenant pas. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. On a, par pivot de Gauss :

$$(x, y) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 - \lambda_2 & = & x \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 & = & y \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 - \lambda_2 & = & x \\ 0 & = & y + 2x \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & z \end{array}\right.$$

Ainsi l'équation $(x, y) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ d'inconnues λ_1, λ_2 admet une solution si et seulement si $y + 2x = 0$. D'où :

$$\text{Vect}(v_1, v_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + 2x = 0\}.$$

Il est alors facile de trouver un vecteur n'appartenant pas à $\text{Vect}(v_1, v_2)$ pour compléter en une base.

2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{ccc} a+c & = & 0 \\ b+2c & = & 0 \\ 2a+2b & = & 0 \\ 3a+3b+3c & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{lll} c & = & 0 \\ a & = & 0 \\ b & = & 0 \quad (L_4 \to \frac{1}{3}L4 - L_1) \end{array} \right.$$

La famille (M_1, M_2, M_3) est donc libre.
Pour compléter en une base, il suffit d'ajouter à la famille un quatrième vecteur $M_4 \notin \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$: la famille (M_1, M_2, M_3, M_4) sera alors encore libre et donc une base pour une raison de dimension.
On peut procéder comme à la question précédente : soit $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E$ et a, b, c des scalaires. Alors, on a :

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{ccc} a+c & = & x \\ b+2c & = & y \\ 2a+2b & = & z \\ 3a+3b+3c & = & t \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{cccl} a+c & = & x & \\ b+2c & = & y & \\ 2b-2c & = & z-2x & (L_3 \to L_3 - 2L_1) \\ 3b & = & t-3x & (L_4 \to L_4 - 3L_1) \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{cccl} a+c & = & x & \\ b+2c & = & y & \\ 3b & = & z-2x+y & (L_3 \to L_3 + L_2) \\ 3b & = & t-3x & \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{cccl} a+c & = & x & \\ b+2c & = & y & \\ 3b & = & z-2x+y & \\ 0 & = & t-x-z-y & (L_4 \to L_4 - L_3) \end{array} \right.$$

On en déduit que l'équation $aM_1+bM_2+cM_3 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ d'inconnues (a,b,c) possède des solutions si et seulement si $t = x+y+z$:

$$\text{Vect}(M_1, M_2, M_3) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E \mid t = x+y+z \right\}.$$

Donc $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$ et la famille (M_1, M_2, M_3, M_4) est donc libre donc une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car de cardinal 4 dans un espace vectoriel de dimension 4.

3. Soit
$$P = 1 - X + X^2 - X^3 \quad ; \quad Q = 1 + X + X^2 + X^3.$$
La famille (P, Q) est formée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre. Cette fois, pour obtenir un base de $\mathbb{R}_3[X]$ (qui est de dimension 4) il va falloir ajouter deux vecteurs.
On peut procéder comme précédemment. On constate que dans P comme dans Q, les coefficients constant et en X^2 sont égaux ; il en sera donc de même de toute combinaison linéaire de P et de Q.
Par conséquent, $X^2 \notin \text{Vect}(P, Q)$ et la famille (P, Q, X^2) est libre.
On remarque de même que pour P, Q et X^2 les coefficients en X et X^3 sont les mêmes ; il en sera donc de même de toute combinaison linéaire de P , Q et X^2.
Par conséquent, $X^3 \notin \text{Vect}(P, Q, X^3)$ et la famille (P, Q, X^2, X^3) est libre.
La famille (P, Q, X^2, X^3) est libre et de cardinal 4 dans un espace vectoriel de dimension 4. C'est donc une base.

Correction de l'exercice 9.

1. Pour l'exercice 14 :
   (a) Soit $F = \{(x + y, y + z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$. On a vu que $((1, 0), (0, 1))$ est une base de F donc F est de dimension 2.
   (b) Soit $F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y - t = 0 \quad \text{et} \quad y = t\right\}$.
   On a vu que $((0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0))$ est une base de F. Donc F est de dimension 2.
   (c) Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(1)\}$.
   On a vu que $(1+X, 2+X^2, 3+X^3)$ est une base de F donc F est de dimension 3.
   (d) Notons $F = \left\{(a + c)X + (2aX + b)X^2 - cX^2 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\right\}$.
   On a vu que la famille $(X + 2X^3,^2, X - X^2)$ est une base de F. Donc F est de dimension 3.
   (e) Soit $F = \left\{\begin{pmatrix} a & a+b & 0 \\ 2a+b & -b & 3a+2b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$.
   La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de F. Donc F est de dimension 2.
   (f) Notons $F = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid a + b = c + d\right\}$.
   La famille $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de F donc F est de dimension 3.
2. Pour l'exercice 15 : en notant, pour $i = 2, \ldots, n$, $f_i = e_1 - e_i$, on a montré que $(f_2, \ldots, f_n)$ est une base de H. Donc H est de dimension $n - 1$ (c'est un hyperplan).

Correction de l'exercice 10. 1. Pour l'exercice 5 : notons E l'ensemble de suites à valeurs réelles vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$
On a trouvé, au TD précédent, que la famille (u, v) où $u = (1)_n$ et $v = (n)_n$ est génératrice de E.

Il s'agit d'une famille de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre.
Ainsi (u, v) est une base de E et E est donc de dimension 2.

2. Pour l'exercice 6 : notons E l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation

$$\forall x \in \mathbb{R},\, y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0.$$

On a trouvé, au TD précédent, que la famille $(t \mapsto e^t \cos(t), t \mapsto e^t \sin(t))$ est génératrice de E.
Il s'agit d'une famille libre (procéder comme pour l'exercice 3).
Ainsi (u, v) est une base de E et E est donc de dimension 2.

Correction de l'exercice 11. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$g_n : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{nx}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.
Supposons que :

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} \lambda_i g_i = 0 \quad \text{càd} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_i e^{ix} = 0.$$

Dans le membre de gauche, le terme dominant en $+\infty$ est $\lambda_n e^{nx}$ donc en factorisant puis en simplifiant par e^{nx} on obtient :

$$(**) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e^{(i-n)x} = 0.$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \lambda_i e^{(i-n)x} = 0$.
En passant à la limite quand x tend vers $+\infty$ dans l'égalité $(**)$ on obtient :

$$\lambda_n = 0.$$

L'égalité $(*)$ se réécrit alors :

$$(*) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e^{ix} = 0$$

et le terme dominant en $+\infty$ est désormais $\lambda_{n-1} e^{(n-1)x}$. En factorisant, simplifiant par e^{nx} puis passant à la limite quand x tend vers $+\infty$ on obtient de même que précédemment :

$$\lambda_{n-1} = 0.$$

En poursuivant le raisonnement, on obtient donc successivement $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \cdots = \lambda_1 = 0$.
Cela montre que la famille $(g_1, \ldots, g_n)$ est libre.

2. Supposons par l'absurde que E est de dimension finie. Il existe donc une famille génératrice finie $\mathcal{G}$ de E donc on note k le cardinal.
On sait alors que toute famille libre de E est de cardinal inférieur ou égal à k.
Or d'après la question précédente, $(g_1, \ldots, g_{k+1})$ est une famille libre de cardinal $k+1$. Contradiction !
Ainsi E n'est pas de dimension finie.

Correction de l'exercice 12. Déterminer le rang des familles suivantes :

1. Soit A la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la famille
$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}\right)$$
dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:
$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -2\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$
D'après le cours le rang de la famille est le rang de A.
On applique la méthode du pivot de Gauss sur les lignes (ou les colonnes) :
$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\right) \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_1)\\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right)\\ &= 2.\end{aligned}$$

2. Soit A la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la famille $(2, 3+X, 7-6X^2, 2X+X^2)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$:
$$A = \begin{pmatrix}2 & 3 & 7 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -6 & 1\end{pmatrix}.$$
D'après le cours, le rang de la famille est le rang de A donc il vaut 3.

Correction de l'exercice 13. Dans $\mathbb{R}^3$, on donne
$$u_1 = (1, 0, -1) \quad ; \quad u_2 = (-1, 2, 1) \quad ; \quad u_3 = (3, -4, -3).$$

1. On remarque que
$$u_3 = u_1 - 2u_2$$
donc $\mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3) = \mathrm{rg}(u_1, u_2)$.
De plus, (u_1, u_2) est formée de deux vecteurs non colinéaires donc c'est une famille libre. Ainsi,
$$\mathrm{rg}(u_1, u_2, u_3) = 2.$$

2. Par définition du rang, on a $\dim F = 2$ d'après la question précédente et (u_1, u_2) est une base F.