Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DS3- 3h00

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Dans tout l'exercice on note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions trois fois dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit également S l'ensemble défini par :

$$S = \{f \in E \mid f''' - 2f'' + 2f' = 0\}.$$

1. Montrer que S est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soient a, b deux réels. On définit trois fonctions u, v, w sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = 1 \quad ; \quad v(x) = e^{ax}\cos(bx) \quad ; \quad w(x) = e^{ax}\sin(bx).$$

(a) On suppose $b = 0$. Montrer que la famille (u, v, w) est liée.

(b) On suppose $b \neq 0$. Montrer que la famille (u, v, w) est libre.

3. **(a)** À l'aide d'intégrations par partie, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^x\cos(x)$ et de $x \mapsto e^x\sin(x)$.

(b) En effectuant le changement de fonction $z = y'$ montrer que les solutions de l'équation différentielle

$$y'''(x) - 2y''(x) + 2y'(x) = 0$$

sont les fonctions de la forme :

$$y : x \longmapsto ae^x\cos(x) + be^x\sin(x) + c \qquad \text{où} \quad (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

(c) En déduire une base et la dimension de S.

4. On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$(P) \qquad y'''(x) - 2y''(x) + 2y'(x) = e^{2x}.$$

(a) Trouver un réel a tel que $y_a : x \mapsto ae^{2x}$ soit une solution particulière de (P).

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (P).
On rédigera toutes les étapes du raisonnement très soigneusement !

(c) L'ensemble des solution de (P) est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Problème

Partie I-La fonction arccos

On note g la fonction définie sur $[0,\pi]$ par :

$$\forall x \in [0,\pi], \quad g(x) = \cos(x).$$

1. Montrer que g réalise une bijection de $[0,\pi]$ dans un intervalle I à préciser.
On notera désormais arccos la bijection réciproque de g, définie sur I et à valeurs dans $[0,\pi]$.

2. **(a)** Déterminer $\arccos(0)$, $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$.

(b) Montrer que pour tout $x \in I$, $\cos(\arccos(x)) = x$.
Montrer que pour tout $x \in [0,\pi]$, $\arccos(\cos(x)) = x$.
A-t-on $\arccos(\cos(x)) = x$ pour tout réel x ?

3. Soit $x \in I$. Montrer que : $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

4. Justifier que arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et déterminer sa fonction dérivée sous une forme simplifiée ne faisant plus intervenir de fonction trigonométrique.

5. **(a)** Déterminer un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de $x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(b) En déduire que arccos admet le développement limité suivant au voisinage de 0 :

$$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3).$$

6. Déterminer la nature, et le cas échéant la valeur, de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

Partie II-Une suite de polynômes définies à l'aide de arccos

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I, \quad p_n(x) = \cos(n\arccos(x)).$$

7. Calculer p_0, p_1 et p_2.

8. **(a)** Soient a, b deux réels. Exprimer $\cos(a+b) + \cos(a-b)$ en fonction de $\cos(a)$ et $\cos(b)$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in I, \quad p_{n+2}(x) = 2xp_{n+1}(x) - p_n(x).$$

(c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} tel que :

$$\forall x \in I, \quad p_n(x) = T_n(x).$$

On précisera une relation de récurrence reliant T_n, T_{n+1} et T_{n+2}.

9. **(a)** Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$.

(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les racines de T_n.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que la famille $(T_0, \dots, T_n)$ est une famille libre.

(b) En déduire qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

11. **(a)** En utilisant 8a, montrer que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$:

$$\int_0^\pi \cos(mt)\cos(nt)dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ \pi & \text{si} \quad m = n = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad m = n > 0 \end{cases}.$$

(b) Avec le changement de variable $x = \cos(t)$ en déduire pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ la nature et le cas échéant la valeur de :

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Partie III-Étude d'une suite

On considère dans cette partie la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 = 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + x_n)}.$$

12. Écrire une fonction Python qui prend en entrée un entier naturel n et renvoie la liste $[x_0, \dots, x_n]$.

13. **(a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0, 1]$.

(b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de $u_n = \arccos(x_n)$ et justifier que $u_n \in [0, \pi]$.

(c) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

Indication : on pourra commencer par montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\cos^2\left(\dfrac{u}{2}\right) = \dfrac{1+\cos(u)}{2}$.

(d) Exprimer u_n en fonction de n puis x_n en fonction de n.

14. **(a)** En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite ℓ.

(b) Trouver un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $x_n - \ell$.

15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $w_n = \prod_{i=1}^n x_i$.

(a) Montrer que $\left(w_n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique donc on précisera la raison.

(b) En déduire que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

(c) Écrire une fonction Python qui prend en entrée un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoie w_n.