

BCPST2 – Mathématiques

DS3- CORRECTION

Exercice 1

Soit également S l'ensemble défini par :

$$S = \{f \in E \mid f''' - 2f'' + 2f' = 0\}.$$

1. — La fonction nulle est dans S donc S est non vide.
- Soient f_1, f_2 deux éléments de S . Comme f_1, f_2 sont dans S , elles sont trois fois dérivables donc $f_1 + \lambda f_2$ l'est aussi et on a par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} (f_1 + \lambda f_2)''' - 2(f_1 + \lambda f_2)'' + 2(f_1 + \lambda f_2)' &= f_1''' + \lambda f_2''' - 2f_1'' - 2\lambda f_2'' + 2f_1' + \lambda f_2' \\ &= f_1''' - 2f_1'' + 2f_1' + \lambda(f_2''' - 2f_2'' + 2f_2'). \end{aligned}$$

Or f_1 et f_2 sont des éléments de S donc :

$$f_1''' - 2f_1'' + 2f_1' = 0 \quad \text{et} \quad f_2''' - 2f_2'' + 2f_2' = 0.$$

Par conséquent :

$$(f_1 + \lambda f_2)''' - 2(f_1 + \lambda f_2)'' + 2(f_1 + \lambda f_2)' = 0$$

ce qui prouve que $f_1 + \lambda f_2 \in S$.

On a donc montré que S est un sous-ensemble non vide de E stable par combinaison linéaire. C'est donc un sous-espace vectoriel de E .

2. Soient a, b deux réels. On définit trois fonctions u, v, w sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = 1 \quad ; \quad v(x) = e^{ax} \cos(bx) \quad ; \quad w(x) = e^{ax} \sin(bx).$$

- (a) On suppose $b = 0$. Alors $w = u$ donc la famille (u, v, w) contient deux fois le même vecteur. Elle est donc liée.
- (b) On suppose $b \neq 0$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_3$ des réels tels que :

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$$

c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 u(x) + \lambda_2 v(x) + \lambda_3 w(x) = 0.$$

Montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. En considérant $x = 0$, $x = \frac{\pi}{b}$ et $x = \frac{\pi}{2b}$, on obtient que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ vérifie :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 - e^{\frac{a\pi}{b}} \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 + e^{\frac{a\pi}{2b}} \lambda_3 &= 0 \end{cases}$$

En faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ on obtient :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ (1 + e^{\frac{a\pi}{b}})\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + e^{\frac{a\pi}{2b}}\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

La famille (u, v, w) est donc libre.

3. (a) D'après le théorème fondamental de l'analyse, comme $x \mapsto e^x \cos(x)$ est continue sur \mathbb{R} alors la fonction $x \mapsto \int_0^x e^t \cos(t) dt$ est une primitive de $x \mapsto e^x \cos(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto \cos(t)$ sont de classe C^1 sur \mathbb{R} donc par intégration par partie :

$$\begin{aligned} \int_0^x e^t \cos(t) dt &= [e^t \cos(t)]_0^x - \int_0^x e^t (-\sin(t)) dt \\ &= e^x \cos(x) - 1 + \int_0^x e^t \sin(t) dt. \end{aligned}$$

Les fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto \sin(t)$ sont de classe C^1 sur \mathbb{R} donc par intégration par partie à nouveau :

$$\begin{aligned} \int_0^x e^t \cos(t) dt &= e^x \cos(x) - 1 + \int_0^x e^t \sin(t) dt \\ &= e^x \cos(x) - 1 + [e^t \sin(t)]_0^x - \int_0^x e^t \cos(t) dt \\ &= e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - 1 - \int_0^x e^t \cos(t) dt. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$2 \int_0^x e^t \cos(t) dt = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - 1.$$

On en déduit que $x \mapsto \frac{1}{2}e^x(\cos(x) + \sin(x))$ est une primitive de $x \mapsto e^x \cos(x)$.

De même, on montre que la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}e^x(-\cos(x) + \sin(x))$ est une primitive de $x \mapsto e^x \sin(x)$.

- (b) — **Analyse** : soit y une solution sur \mathbb{R} de

$$y''' - 2y'' + 2y' = 0.$$

En posant $z = y'$ alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 = y'''(x) - 2y''(x) + 2y'(x) = z''(x) - 2z'(x) + 2z(x).$$

Donc z est solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants dont l'équation caractéristique est :

$$r^2 - 2r + 2 = 0.$$

Le discriminant Δ vaut : $\Delta = 4 - 8 = -4$.

Les racines sont : $\frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$.

Ainsi il existe des constantes A et B telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y'(x) = z(x) = Ae^x \cos(x) + Be^x \sin(x).$$

En utilisant la question précédente, on peut primitiver pour obtenir :

$$y(x) = \frac{A}{2}e^x(\cos(x) + \sin(x)) + \frac{B}{2}e^x(\sin(x) - \cos(x)) + c$$

où $c \in \mathbb{R}$. En posant $a = \frac{A}{2} - \frac{B}{2}$ et $b = \frac{A}{2} + \frac{B}{2}$ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = ae^x \cos(x) + be^x \sin(x) + c.$$

— **Synthèse** : on vérifie que les fonctions de la forme $y : x \mapsto ae^x \cos(x) + be^x \sin(x) + c$ avec a, b, c des réels vérifient bien l'équation demandée (sur une copie il faut le faire réellement !!).

Ainsi les solutions de l'équation différentielle

$$y''' - 2y'' + 2y' = 0$$

sont les fonctions de la forme :

$$y : x \mapsto ae^x \cos(x) + be^x \sin(x) + c \quad \text{où } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

(c) D'après la question précédente :

$$S = \text{Vect}(x \mapsto e^x \cos(x), x \mapsto e^x \sin(x), x \mapsto 1).$$

La famille $(x \mapsto e^x \cos(x), x \mapsto e^x \sin(x), x \mapsto 1)$ est donc une famille génératrice de S .

De plus d'après la question **2.(b)**, c'est une famille libre.

Ainsi il s'agit d'une base de S et donc S est de dimension 3.

4. (a) On considère l'équation différentielle sur \mathbb{R} :

$$(P) \quad y''' - 2y'' + 2y' = e^{2x}.$$

(b) Soit un réel a . On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y_a'''(x) - 2y_a''(x) + 2y_a'(x) = 8ae^{2x} - 8ae^{2x} + 4ae^{2x} = 4ae^{2x}.$$

Donc en prenant $a = \frac{1}{4}$ on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_a'''(x) - 2y_a''(x) + 2y_a'(x) = e^{2x}.$$

(c) Il n'y a aucun résultat de cours sur ce genre d'équation d'ordre de 3. Il faut donc redémontrer dans ce cas que toute solution s'écrit sous forme « solution de l'équation homogène » + « solution particulière ». Soit y une solution de (E)

et y_a la solution particulière de la question précédente. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned} & (y - y_a)'''(x) - 2(y - y_a)''(x) + 2(y - y_a)'(x) \\ &= y'''(x) - 2y''(x) + 2y'(x) - (y_a'''(x) - 2y_a''(x) + 2y_a'(x)) \\ &= e^{2x} - e^{2x} = 0. \end{aligned}$$

Donc $y - y_a$ est dans S et il existe donc a, b, c des réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y(x) - y_a(x) = ae^x \cos(x) + be^x \sin(x) + c$$

c'est-à-dire

$$y(x) = ae^x \cos(x) + be^x \sin(x) + c + \frac{1}{4}e^{2x}.$$

Réciproquement, on vérifie que si y est de la forme

$$y : x \mapsto ae^x \cos(x) + be^x \sin(x) + c + \frac{1}{4}e^{2x}$$

avec a, b, c des réels alors y est solution de (P) .

Les solutions de (P) sont donc les fonctions de la forme :

$$y : x \mapsto ae^x \cos(x) + be^x \sin(x) + c + \frac{1}{4}e^{2x}$$

avec a, b, c des réels.

(d) La fonction nulle n'est pas solution de (P) donc non.

Problème

Partie I-La fonction arccos

On note g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad g(x) = \cos(x).$$

1. La fonction \cos est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$ d'après le théorème de la bijection continue, g réalise donc une bijection de $[0, \pi]$ sur $I = [g(\pi), g(0)] = [-1, 1]$.

On notera désormais \arccos la bijection réciproque de g .

2. **(a)** Il s'agit de trouver l'unique $x \in [0, \pi]$ tel que $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

$$\text{Ainsi } \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

$$\text{De même } \arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \text{ est l'unique } x \in [0, \pi] \text{ tel que } \cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Donc } \arccos\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

(b) Comme arccos est la bijection réciproque de g on a :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \arccos(g(x)) = x \quad \text{càd} \quad \arccos(\cos(x)) = x.$$

Cela n'est pas le cas si $x \notin [0, \pi]$! Par exemple :

$$\cos(2\pi) = 1 \quad \text{donc} \quad \arccos(\cos(2\pi)) = \arccos(1) = 0.$$

De même, g est la bijection réciproque de arccos donc :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arccos(x)) = x.$$

3. Soit $x \in [-1, 1]$. On a :

$$\sin^2(\arccos(x)) = 1 - \cos^2(\arccos(x)) = 1 - x^2$$

donc :

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{ou} \quad \sin(\arccos(x)) = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Or $\arccos(x) \in [0, \pi]$ donc $\sin(\arccos(x))$ est positif. Ainsi :

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

4. La fonction g est dérivable sur $[0, \pi]$ et pour tout $x \in [0, \pi]$ on a :

$$g'(x) = -\sin(x).$$

Ainsi pour tout $x \in]0, \pi[$, $g'(x) \neq 0$. D'après le théorème de dérivation des fonctions réciproques, on en déduit que arccos est dérivable en tout $x \in [-1, 1]$ tel que $\arccos(x) \notin \{0, \pi\}$ c'est-à-dire sur $] -1, 1[$. De plus on a :

$$\forall x \in] -1, 1[\quad , \arccos'(x) = \frac{1}{g'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

5. (a) D'après les DL usuels :

$$\frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} = -\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right).$$

(b) La fonction $f : x \mapsto \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$ étant de classe C^2 sur $] -1, 1[$ la formule de Taylor appliquée à f donne :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2).$$

En comparant avec le DL ci-dessus on en déduit par unicité :

$$f(0) = -1 \quad ; \quad f'(0) = 0 \quad ; \quad f''(0) = -1.$$

Or $f = \arccos'$ donc arccos est de classe C^3 et on a :

$$\arccos'(0) = -1 \quad ; \quad \arccos''(0) = 0 \quad ; \quad \arccos'''(0) = -1.$$

D'après la formule de Taylor appliqué à arccos, on a donc :

$$\begin{aligned} \arccos(x) &= \arccos(0) + \arccos'(0)x + \frac{\arccos''(0)}{2}x^2 + \frac{\arccos'''(0)}{6}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\ &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3). \end{aligned}$$

6. L'intégrande est une fonction continue sur $] - 1, 1[$ donc l'intégrale est généralisée en -1 et en 1 .

— Intégrale $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$. Soit $A \in] - 1, 0[$. D'après la question 5, on a :

$$\int_A^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = [-\arccos(t)]_A^0 = -\arccos(0) + \arccos(A)$$

$$\xrightarrow{A \rightarrow -1} -\arccos(0) + \arccos(-1) = -\frac{\pi}{2} + \pi.$$

Le passage à la limite est licite car la fonction \arccos est continue sur $[-1, 1]$ d'après le théorème de la bijection. Donc $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.

— Intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$. Soit $A \in [0, 1[$. D'après la question 5, on a :

$$\int_0^A \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = [-\arccos(t)]_0^A = -\arccos(A) + \arccos(0)$$

$$\xrightarrow{A \rightarrow 1} -\arccos(1) + \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.

Ainsi, $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est convergente et :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \pi.$$

Partie II- Une suite de polynômes définies à l'aide de \arccos

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad p_n(x) = \cos(n \arccos(x)).$$

7. Pour tout $x \in [-1, 1]$ on a :

$$p_0(x) = \cos(0 \times \arccos(x)) = \cos(0) = 1 ;$$

$$p_1(x) = \cos(1 \times \arccos(x)) = \cos(\arccos(x)) = x ;$$

$$p_2(x) = \cos(2 \arccos(x)) = 2 \cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1.$$

8. (a) Soient a, b deux réels. On a :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) + \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ &= 2\cos(a)\cos(b). \end{aligned}$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1, 1]$. On a d'après 8a

$$\begin{aligned} p_{n+2}(x) &= \cos((n+2) \arccos(x)) \\ &= \cos((n+1) \arccos(x) + \arccos(x)) \\ &= 2\cos((n+1) \arccos(x)) \cos(\arccos(x)) - \cos((n+1) \arccos(x) - \arccos(x)) \\ &= 2p_{n+1}(x)x - p_n(x). \end{aligned}$$

- (c) Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et coefficient dominant 2^{n-1} tel que :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad p_n(x) = T_n(x).$$

- **Initialisation** : d'après la question 7, on a $T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons qu'il existe deux polynômes T_n et T_{n+1} de degré respectif n et $n+1$ et de coefficient dominant respectif 2^{n-1} et 2^n tels que :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad p_n(x) = T_n(x) \quad \text{et} \quad p_{n+1}(x) = T_{n+1}(x).$$

Alors d'après 8b pour tout $x \in [-1, 1]$ on a :

$$p_{n+2}(x) = 2xp_{n+1}(x) - p_n(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

Ainsi en posant $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$, le polynôme T_{n+2} convient.

De plus, le degré et le coefficient de T_{n+2} sont alors ceux de $2XT_{n+1}$ à savoir $n+1$ et 2^{n+1} .

- **Conclusion** : par le principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} tel que :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad p_n(x) = T_n(x).$$

Les polynômes $(T_n)_n$ vérifient la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Attention, cette question est plus dure qu'elle n'y paraît car :

$$\arccos(\cos(\theta)) \neq \theta!$$

Par exemple :

$$\arccos(\cos(2\pi)) = \arccos(1) = 0 \neq 2\pi.$$

En fait $\arccos(\cos(\theta)) = \theta$ seulement pour $\theta \in [0, \pi]$.

- **Méthode 1** : Soit $\theta \in [0, \pi]$ comme $\cos(\theta) \in [-1, 1]$ alors on a :

$$T_n(\cos(\theta)) = p_n(\cos(\theta)) = \cos(n \arccos(\cos(\theta))) = \cos(n\theta).$$

Maintenant, si $\theta \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_0 = \pm(\theta + 2k\pi) \in [0, \pi]$ et $\cos(\theta) = \cos(\theta_0)$ et on a donc :

$$T_n(\cos(\theta)) = T_n(\cos(\theta_0)) = \cos(n\theta_0) = \cos(n\theta).$$

- **Méthode 2** : par récurrence double.

L'initialisation découle de la question 7. Pour l'hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ et $T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta)$. Alors d'après la question 8a on a :

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta). \end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} T_n(\cos(\theta)) = 0 &\iff \cos(n\theta) = 0 \iff n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \theta = \frac{2k+1}{2n}\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$ est une racine de T_n .

Or pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\frac{2k+1}{2n}\pi \in [0, \pi]$ et la fonction \cos est bijective sur $[0, \pi]$. Ainsi on a n racines distinctes de T_n avec :

$$\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \quad k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

Comme T_n est de degré n , ce sont les seuls.

10. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) La famille (T_0, \dots, T_n) est famille de polynômes non nuls de degré échelonné. Donc c'est une famille libre.

(b) Il s'agit d'une famille libre d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ de cardinal $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

11. (a) Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. D'après 8a, on a :

$$\int_0^\pi \cos(mt) \cos(nt) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((m+n)t) + \cos((m-n)t)) dt.$$

— Si $m = n = 0$ on a alors $\int_0^\pi \cos(mt) \cos(nt) dt = \int_0^\pi 1 dt = \pi$.

— Si $m = n > 0$ on a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(mt) \cos(nt) dt &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((m+n)t) + \cos((m-n)t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos(2mt) + 1) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2mt)}{2m} + t \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

— Si $m \neq n$ on a alors :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos(mt) \cos(nt) dt &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((m+n)t) + \cos((m-n)t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((n+m)t)}{n+m} + \frac{\sin((m-n)t)}{m-n} \right]_0^\pi \\ &= 0. \end{aligned}$$

(b) La fonction $t : x \mapsto \arccos(x)$ est de classe C^1 et strictement décroissante sur $] -1, 1[$. De plus :

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = - \int_{-1}^1 T_n(\cos(t(x))) T_m(\cos(t(x))) t'(x) dx.$$

Comme $t(-1) = \pi$ et $t(1) = 0$, d'après la formule de changement de variable, l'intégrale $\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ est de même nature que $-\int_{\pi}^0 T_n(\cos(t))T_m(\cos(t))dt$ et en cas de convergence, sont égales.

Or d'après les questions précédentes :

$$-\int_{\pi}^0 T_n(\cos(t))T_m(\sin(t))dt = \int_0^{\pi} T_n(\cos(t))T_m(\cos(t))dt = \int_0^{\pi} \cos(nt) \cos(mt)dt$$

est convergente. Finalement $\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ converge et vaut

$$\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } m = n > 0 \end{cases} .$$

Partie III-Étude d'une suite

On considère dans cette partie la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 = 0 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+x_n)}.$$

12. Écrire une fonction Python qui prend en entrée un entier naturel n et renvoie la liste $[x_0, \dots, x_n]$:

```

1 def fonction_pb(n):
2     x = 0
3     L = []
4     for k in range(n+1):
5         L.append(x)
6         x = np.sqrt(1/2*(1+x))
7     return L
    
```

13. (a) Par récurrence :

- **Initialisation** : $x_0 = 0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $x_n \in [0, 1]$. On a alors

$$0 \leq \frac{1}{2}(1+x_n) \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

puis par croissance stricte de la fonction racine carrée :

$$0 \leq x_{n+1} \leq 1.$$

- **Conclusion** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0, 1]$.

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction arccos étant définie sur $[-1, 1]$ d'après la question précédente $u_n = \arccos(x_n)$ est bien définie et dans $[0, \pi]$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que d'après **2b**, $\cos(u_n) = x_n$ donc :

$$u_{n+1} = \arccos \left(\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos(u_n))} \right).$$

Or on sait que $\cos^2 \left(\frac{u_n}{2} \right) = \frac{1 + \cos(u_n)}{2}$ donc

$$u_{n+1} = \arccos \left(\sqrt{\cos^2 \left(\frac{u_n}{2} \right)} \right) = \arccos \left(\left| \cos \left(\frac{u_n}{2} \right) \right| \right).$$

Or $\frac{u_n}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$ donc son cosinus est positif ainsi :

$$u_{n+1} = \arccos \left(\cos \left(\frac{u_n}{2} \right) \right).$$

Enfin, comme $\frac{u_n}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \subset [0, \pi]$ on a :

$$u_{n+1} = \arccos \left(\cos \left(\frac{u_n}{2} \right) \right) = \frac{u_n}{2}.$$

En particulier, (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

(d) Comme (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2^n} u_0 = \frac{1}{2^n} \arccos(0) = \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \cos(u_n) = \cos \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} \right).$$

14. (a) D'après la question précédente et la continuité de \cos en 0 on en déduit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\cos(0) = 1$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$x_n - \ell = \cos \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} \right) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $w_n = \prod_{i=1}^n x_i$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} \sin \left(\frac{\pi}{2^{n+2}} \right) &= \sin \left(\frac{\pi}{2^{n+2}} \right) \prod_{i=1}^{n+1} x_i \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{2^{n+2}} \right) x_{n+1} \prod_{i=1}^n x_i \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{2^{n+2}} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2^{n+2}} \right) w_n \\ &= \frac{1}{2} \sin \left(2 \frac{\pi}{2^{n+2}} \right) w_n \\ &= \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} \right) w_n. \end{aligned}$$

Ainsi la suite $\left(w_n \sin \left(\frac{\pi}{2^{n+1}} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

(b) D'après la question précédente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$w_n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} w_1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2^n}.$$

Or on sait que :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

donc :

$$w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{2}{\pi}$$

Donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{2}{\pi}$.