Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD7

Séries

Exercice 1. Étudier la nature des séries suivantes et, le cas échéant, calculer leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{7^{n-1}}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{4n^2+5n}{5^n}$.
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n n}{3^n}$.
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$.
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n2^n}{n!}$.
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n}{2^{2n+1}}$.

Exercice 2. On considère la série de terme général donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{n^3+2n^2-4n+1}{n!}.$$

1. Montrer que la famille $(1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[x]$.
2. Déterminer les coordonnées de x^3+2x^2-4x+1 dans cette base.
3. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 3 (Télescopage). Étudier la nature des séries et, le cas échéant, déterminer leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{2}{n(n^2-1)}$ (*Calculer* $\displaystyle\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n-1}$).

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \in]0,1[\\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n - u_n^2. \end{cases}$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1]$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2$ et déterminer sa somme si elle existe.
4. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ diverge.
5. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$.

Exercice 5. Déterminer la nature des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^3-n^2+1}{5n^5+3n^4+2n}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(n^{\frac{1}{n}}-1)$.
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
5. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\ln n}}$
6. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^3}\right)$.
7. $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{n}{\ln n}$.
8. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\sqrt{n^2-n+2}-n\right)$.
9. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1-\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right)$.

Exercice 6. Étudier la nature des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 0}((-1)^n n+\sqrt{n})e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 7 (Une série convergente mais pas absolument convergente). Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$\forall n \geq 1 \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Pour tout $n \geq 1$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ n'est pas absolument convergente.
2. (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geq 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
   (b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge.
   (c) En déduire que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 8 (Deux suites équivalentes, l'une convergente, l'autre divergente). Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$\forall n \geq 1 \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

et $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$\forall n \geq 1 \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que $v_n \sim u_n$.
2. Montrer que la série $\sum v_n$ diverge (on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent).

Exercice 9. On note $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in]1,+\infty[\,,\ f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} f(k)$.

1. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

2. Montrer, pour tout entier k tel que $k \geq 3$:

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1).$$

3. (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$S_n - \frac{1}{2\ln(2)} \leq \int_2^n f(x)\,dx \leq S_n - \frac{1}{n\ln(n)}.$$

   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq S_n \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + \frac{1}{2\ln(2)}.$$

   (c) Établir : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \text{ et } v_n = S_n - \ln(\ln(n)).$$

   (a) En utilisant le résultat de la question 2., montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 2}$ et $(v_n)_{n\geq 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

   (b) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$0 \leq v_n - \ell \leq \frac{1}{n\ln(n)}.$$

   (c) En déduire une fonction Python prenant en entrée un réel `eps` > 0 et renvoyant une valeur approchée de ℓ à `eps` près.