Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD8

Probabilités générales

1 Espaces probabilisés

Exercice 1. On considère l'espace probabilisable $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ et on pose :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}((\{k\}) = a3^{-k}$$

où a est un réel à déterminer.

1. Déterminer a pour que l'on définisse bien une probabilité.
2. Quelle est la probabilité de l'ensemble des nombre pairs ? Impairs ?

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Omega = [\![1, n]\!]$.

1. Déterminer une probabilité $\mathbb{P}$ telle que pour tout $k \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{k\})$ soit proportionnelle à k.
2. Déterminer une probabilité $\mathbb{P}$ telle que pour tout $k \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{1, \dots, k\})$ soit proportionnelle à k.

Exercice 3. L'indice de coïncidence I d'un texte est la probabilité pour que deux lettres prises au hasard dans ce texte soient les mêmes. On considère un texte de n lettres et on note $n_A, \dots, n_Z$ le nombre de A,. . .,Z.

1. Modéliser l'expérience par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
2. Montrer que $I = \dfrac{n_A \times (n_A - 1)}{n \times (n-1)} + \cdots + \dfrac{n_Z \times (n_Z - 1)}{n \times (n-1)}$.

Exercice 4. On considère une urne contenant deux boules rouges, trois boules blanches et une boule verte. On tire successivement sans remise trois boules de l'urne et on s'intéresse à leur couleur.

1. Modéliser l'expérience par un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir une blanche, une blanche puis une rouge.

Exercice 5. Un laboratoire a mis au point un test pour déceler des souris malades. Des essais prouvent que :

— 96 fois sur 100, le test donne un résultat positif quand la souris est effectivement malade.

— 94 fois sur 100, le test donne un résultat négatif quand la souris n'est pas malade.

Dans une population de souris comprenant 3% de malades, on pratique le test sur une souris choisie au hasard et on constate que le test donne un résultat positif.
Quelle est la probabilité que la souris soit malade ?

Exercice 6. Une forêt se compose de trois types d'arbres : 30% sont des chênes, 20% des hêtres, et 50% des boulots. Suite à une tempête, une maladie se déclare et touche 10% des chênes, 4% des boulots, et 25% des hêtres.
Sachant qu'un arbre est malade, quelle est la probabilité que ce soit un chêne ? un boulot ? un hêtre ?

Exercice 7. On jette n fois une pièce, pile sortant avec probabilité p à chaque tirage. Soit P_n la probabilité pour que le nombre de piles soit pair dans n jets (comptant 0 comme nombre pair).

1. Montrer que : $P_n = (q-p)P_{n-1} + p$ où $q = 1-p$.
2. En déduire que $P_n = \dfrac{1}{2}(1 + (q-p)^n)$ pour $n \geq 0$.

Exercice 8. Un prince est retenu prisonnier dans un château. Une princesse se met en tête de le délivrer. Lorsqu'elle arrive à l'entrée du château, elle se retrouve face à 3 portes et en ouvre une au hasard (équiprobable).

— Si elle ouvre la première, elle délivre le prince ;

— si elle ouvre la deuxième, elle se trouve nez à nez avec un dragon qui n'en fait qu'une bouchée,

— derrière la dernière porte se trouve un sorcier qui lui fait boire un filtre : elle oublie tout et est remise face au trois portes.

Elle réitère ses tentatives jusqu'à libérer le prince ou mourir.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de l'événement D_k : « elle délivre le prince au k-ième essai ».
2. Calculer la probabilité de l'événement D : « elle délivre le prince ».

Exercice 9. Soient $n, b \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne contenant initialement deux boules blanches et deux boules noires dans laquelle on effectue des tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant : si la boule tirée est noire, on arrête les tirages ; si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avec en plus b boules blanches supplémentaires.
On note N_k « obtenir une boule noire lors du k-ième tirage », A_n l'événement « une boule blanche apparaît à chacun des n premiers tirages » et F « ne jamais obtenir de boules noires ».

1. Calculer $\mathbb{P}(N_n)$ et montrer que $\mathbb{P}(A_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{bk+2}{kb+4}$ pour tout $n \geq 1$.
2. On suppose dans cette question que $b = 1$. Calculer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N_n)$.
3. On se replace dans le cas général.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour toute famille $x_1, \ldots, x_n$ de réels positifs on a :
   $$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geq \sum_{k=1}^{n} x_k.$$
   (b) En déduire une minoration de $\dfrac{1}{\mathbb{P}(A_n)}$ et montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.
   (c) En utilisant le fait que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \subset A_m$, calculer $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$.
   (d) En déduire que F est négligeable.

Exercice 10. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On les suppose mutuellement indépendants et de probabilités respectives $p_i = \mathbb{P}(A_i)$.

1. Donner une expression simple de $\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ en fonction de $p_1, \ldots, p_n$.
2. Application : on suppose qu'une personne est soumise à n expériences indépendantes les unes des autres et qu'à chaque expérience, elle ait une probabilité p d'avoir un accident. Quelle est la probabilité qu'elle ait au moins un accident ?

Exercice 11. On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6. Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?

2 Variables aléatoires réelles

Exercice 12. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire, sans remise (ou simultanément, ce qui revient au même) n boules et on note X le plus grand des numéros tirés.

1. Donner un ensemble raisonnable dans lequel X prend ses valeurs.
2. En calculant par dénombrements, donner la loi de X.
3. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 13. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.
Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1; n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.
2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 14. Soit X_i, X_2 deux variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note F_1 et F_2 leur fonction de répartition respective.

1. Déterminer la fonction de répartition de $\max(X_1, X_2)$ en fonction de F_1 et F_2.
2. Déterminer la fonction de répartition de $\min(X_1, X_2)$ en fonction de F_1 et F_2.