Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DS4-4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Questions de cours (durée approximative : 30 min)

1. **Séries**.
   - **(a)** Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-2)^n}{(n+1)!}$ converge et déterminer sa somme.
   - **(b)** Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^2\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$ converge et déterminer sa somme.
   - **(c)** Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$.
2. **Espaces vectoriels**. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}$.
   - **(a)** Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer une base de F. En déduire $\dim(F)$.
   - **(b)** Montrer que la famille $(X, X(X-1), X(X-1)^2, \dots, X(X-1)^{n-1})$ est une base de F.

Exercice 1 (durée approximative : 1h15)

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ et on note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de ses sommes partielles.

1. **(a)** Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$.
   - **(b)** En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   - **(c)** **Python**. Écrire une fonction python qui prend en entrée un réel positif A et renvoie la valeur du premier indice n pour lequel $S_n > A$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

(a) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

(b) En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 4, on a :

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx.$$

(c) En déduire qu'il existe trois réels a,b et c tels que :

$$\forall n \geq 4, \quad \frac{\ln(n+1)^2}{2} - a \leq S_n - b \leq \frac{\ln(n)^2}{2} - c.$$

(d) Montrer soigneusement que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)^2}{2}$.

3. Soit u la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - \frac{\ln(n)^2}{2}.$$

(a) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a : $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
Indication : on pourra utiliser la question 2b.

(b) En déduire que la suite u converge.

4. On considère désormais la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{\ln(n)}{n}$.

(a) Montrer que les suites $V = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $W = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{\ln(n)}{n}$

On notera ℓ la somme de cette série.

(b) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} = S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

(c) En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et exprimer sa limite en fonction de ℓ.

Exercice 2 (durée approximative : 1h15)

On considère une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules noires indiscernables au toucher (N_1 et N_2 sont des entiers naturels non nuls).
On pose $N = N_1 + N_2$.
On répète l'expérience suivante : on tire au hasard (uniformément) une boule dans l'urne et on replace dedans deux boules de la couleur obtenue.
À l'issue de la première expérience, l'urne contient donc $N + 1$ boules et on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne.

À l'issue de la deuxième expérience, l'urne contient donc $N+2$ boules et on note X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne.
Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue de la k-ième répétition de l'expérience.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note B_k l'événement « la boule tirée lors de la k-ième expérience est blanche ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

- **(a)** Donner sans justification l'espérance de X.
- **(b)** Prouver par récurrence que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- **(c)** En déduire la variance de X.

2. On suppose dans cette question uniquement que $N_1 = N_2 = 1$.

- **(a)** Déterminer la loi de X_1 et X_2.
- **(b)** Compléter le programme suivant prenant en entrées des entiers N_1, N_2 et k et simulant la variable aléatoire X_k :

```
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def X(N1,N2,k):
    Nb_blanche = N1
    Nb_noire = N2
    for i in range(k):
        if rd.rand()< ________ :
            ________
        else :
            ________
    return Nb_blanche
```

Rappel : la fonction ***rd.rand()*** *tire un nombre aléatoire entre* $[0,1[$ *de sorte que pour tout intervalle* $I \subset [0,1[$, $\mathbb{P}(rd.rand() \in I) = \text{longueur}(I)$.

- **(c)** A la suite du programme précédente, on a ajoute les lignes de code suivantes :

```
n = 100000
k=3
L=(k+1)*[0]
for _ in range(n):
    L[X(1,1,k)-1]+=1/n
plt.bar(range(1,k+2),L)
```

et on obtient l'histogramme suivant :

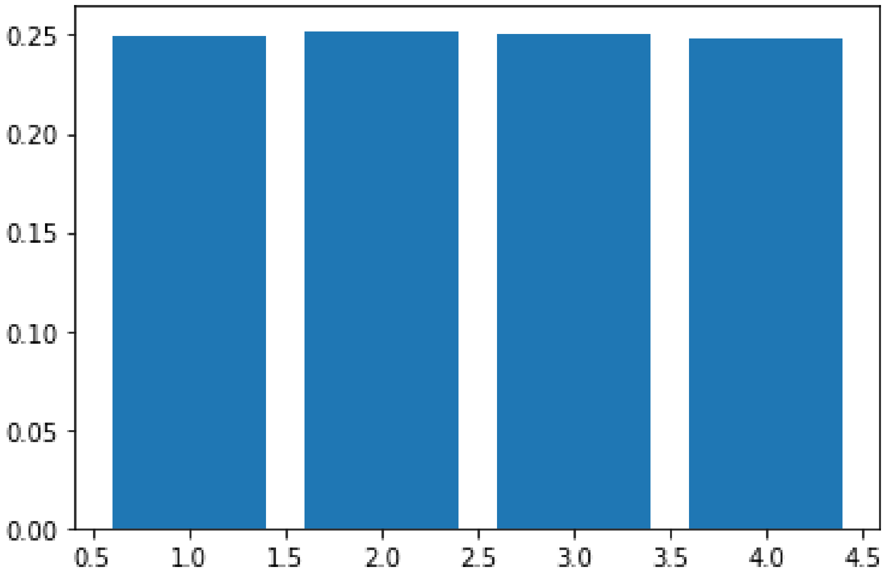
Que peut-on conjecturer sur la variable X_3 ?

- **(d)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que X_n suit une loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

On pourra faire une récurrence et utiliser le système complet d'événements $([X_n = k])_{k \in [\![1, n+1]\!]}$ *pour déterminer la loi de* X_{n+1}.

- **(e)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité de B_{n+1}.

On pourra utiliser la question précédente et la formule des probabilités totales.



3. On retourne désormais au cas général.

(a) Déterminer $\mathbb{P}(B_1)$ et $\mathbb{P}(B_2)$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

i. Montrer que :

$$\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} k\mathbb{P}(X_{n-1}=k) = (N+n-1)\mathbb{P}(B_n).$$

ii. Soit $k \in [\![N_1, N_1+n-1]\!]$.
Déterminer la probabilité de B_{n+1} sachant $B_n \cap [X_{n-1}=k]$ puis la probabilité de B_{n+1} sachant $\overline{B}_n \cap [X_{n-1}=k]$.

iii. En déduire que $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_n)$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente la probabilité de B_n et l'espérance de X_n.

Exercice 3 (durée approximative : 50 min)

Soit $E_2 = \left\{ M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ ; \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. **(a)** Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Déterminer une base de E_2 et en déduire $\dim(E_2)$.

2. Montrer que pour tout $M, N \in E_2$, on a $MN = NM$.

3. Soit $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}' = (U, V)$ est une base de E_2.

(b) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, U^n et V^n.
Calculer aussi UV.

(c) Déterminer, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, les coordonnées de $M_{a,b}^n$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ avec $c \neq d$. On note :

$$A = M_{a,b,c,d} = \begin{pmatrix} c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} c^n & 0 & \dfrac{d^n - c^n}{d-c}a & \dfrac{d^n - c^n}{d-c}b \\ 0 & c^n & \dfrac{d^n - c^n}{d-c}b & \dfrac{d^n - c^n}{d-c}a \\ 0 & 0 & d^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^n \end{pmatrix}.$

5. Pour tout réel z on note E_z l'ensemble :

$$E_z = \{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = zX\}.$$

(a) Montrer que E_c et E_d sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base $\mathcal{B}_c$ de E_c et $\mathcal{B}_d$ de E_d.

(b) Montrer que $\mathcal{B}_c \cup \mathcal{B}_d$ est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

(c) Soit e_i le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ ($i \in [\![1,4]\!]$) et soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Justifier Me_i est la i-ème colonne de M.

(d) En déduire une matrice P inversible telle que : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$