Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DS4-4H

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Questions de cours

1. Séries.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{(k+1)!} = \frac{-1}{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{-1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(-2)^j}{j!}.$$

On reconnaît, au terme de rang 0 près, une somme partielle de série exponentielle. Ainsi la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{(k+1)!} \right)_{n \geq 0}$ converge.

En d'autres termes, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-2)^n}{(n+1)!}$ converge et de plus sa somme est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)!} = \frac{-1}{2} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-2)^j}{j!} - 1 \right) = -\frac{1}{2}(e^{-2} - 1).$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} n^2 \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} &= \frac{1}{3} \times (n^2 - n + n) \times \left(\frac{-1}{3} \right)^n \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{9} \times n(n-1) \left(\frac{-1}{3} \right)^{n-2} - \frac{1}{3} \times n \left(\frac{-1}{3} \right)^{n-1} \right) \end{aligned}$$

.

Ainsi, la série $\sum_{n \geq 1} n^2 \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$ est combinaison linéaire des séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2 de raison $\frac{-1}{3}$ qui sont convergentes (car $\frac{-1}{3} \in]-1, 1[$).

Ainsi la série $\sum_{n\geq 1} n^2 \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$ converge et déterminer sa somme est :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} &= \frac{1}{27}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^3} - \frac{1}{9}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{2}{4^3} - \frac{1}{4^2} \\ &= -\frac{1}{32}.\end{aligned}$$

(c) Par équivalent usuel, comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$ alors :

$$\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Par compatibilité des équivalents avec la valeur absolue, on a :

$$\left|\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Comme les séries $\sum_{n\geq 1} \left|\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right|$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ sont à termes positifs, d'après le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, on en déduit qu'elles sont de même nature.

Or on sait que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente. Donc $\sum_{n\geq 1} \left|\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right|$ est convergente aussi.

Cela signifie que la série $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$ est absolument convergente. En particulier, elle est convergente.

2. **Espaces vectoriels**. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 0\}$.

(a) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$P \in F \iff P(0) = 0 \iff a_0 = 0.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}F &= \{\sum_{k=1}^{n} a_k X^k \ ; \ a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}(X, \dots, X^n).\end{aligned}$$

Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et la famille $(X, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de F.

Il s'agit d'une sous-famille de la base canonique donc elle est libre.

Par conséquent, $(X, \dots, X^n)$ est une famille libre et génératrice de F donc une base de F. On en déduit que $\dim(F) = n$.

(b) La famille $(X, X(X-1), X(X-1)^2, \dots, X(X-1)^{n-1})$ est constituée d'éléments non nuls de F de degrés échelonnés. C'est donc une famille libre de F.

De plus elle est de cardinal $n = \dim(F)$. C'est donc une base de F.

Exercice 1

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ et on note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de ses sommes partielles.

1. **(a)** Pour tout $n \geq 3$ on a par croissance de la fonction logarithme :

$$\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{\ln(3)}{n} \geq \frac{\ln(e)}{n} = \frac{1}{n} \geq 0.$$

Or la série harmonique est divergente donc d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ diverge aussi..

(b) Comme $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ est à termes positifs, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de ses sommes partielles est croissante.

Comme $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n}$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de ses sommes partielles est divergente.

D'après le théorème de convergence monotone, on en conclut que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

(c) **Python**. Écrire une fonction python qui prend en entrée un réel positif A et renvoie la valeur du premier indice n pour lequel $S_n > A$.

```python
def question1(A):
        S = 0
        n = 0
        while S<= A:
                n += 1
                S += np.log(n)/n
        return n
```

2. Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

(a) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et poi=ur tout $x > 0$ on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

On en déduit :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

(b) Soit $k \geq 4$. Les intervalles $[k, k+1]$ et $[k-1, k]$ sont alors inclus dans $[e, +\infty[$ sur lequel f est décroissante. Ainsi :

$$\forall x \in [k, k+1], \quad f(x) \leq f(k)$$

et

$$\forall x \in [k-1, k], \quad f(k) \leq f(x).$$

En intégrant ces inégalités entre $[k, k+1]$ et $[k-1, k]$ on obtient, par croissance de l'intégrale (les bornes étant dans l'ordre croissant) :

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx = f(k)(k+1-k) = f(k) = \frac{\ln(k)}{k}$$

et

$$\frac{\ln(k)}{k} = \int_{k-1}^{k} f(k)dx \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx.$$

On a donc :

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx.$$

(c) Soit $n \geq 4$. En sommant l'inégalité précédente pour k allant de 4 à n, on a :

$$\sum_{k=4}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leq \sum_{k=4}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)dx.$$

Or, par la relation de Chasles, on a :

$$\sum_{k=4}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx = \int_4^{n+1} f(x)dx = \left[\frac{\ln(x)^2}{2}\right]_4^{n+1} = \frac{\ln(n+1)^2}{2} - \frac{\ln(4)^2}{2}$$

et de même :

$$\sum_{k=4}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)dx = \int_3^{n} f(x)dx = \left[\frac{\ln(x)^2}{2}\right]_3^{n} = \frac{\ln(n)^2}{2} - \frac{\ln(3)^2}{2}.$$

Ainsi :

$$\frac{\ln(n+1)^2}{2} - \frac{\ln(4)^2}{2} \leq \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \leq \frac{\ln(n)^2}{2} - \frac{\ln(3)^2}{2}.$$

En posant $a = \dfrac{\ln(4)^2}{2}$, $b = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} f(k)$ et $c = \dfrac{\ln(3)^2}{2}$, on a bien :

$$\frac{\ln(n+1)^2}{2} - a \leq S_n - b \leq \frac{\ln(n)^2}{2} - c.$$

(d) Soit $n \geq 4$. En divisant membre à membre par $\dfrac{\ln(n)^2}{2}$, on obtient :

$$\frac{\ln(n+1)^2}{\ln(n)^2} + \frac{2(b-a)}{\ln(n)^2} \leq \frac{2S_n}{n^2} \leq 1 + \frac{2(c-a)}{\ln(n)^2}.$$

Le membre de droite tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

D'autre part, pour tout $n \geq 4$:

$$\frac{\ln(n+1)^2}{\ln(n)^2} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^2}{\ln(n)^2} = \left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

On en déduit, par opération sur les limites, que le membre de gauche tend également vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

D'après le théorème des gendarmes, on en déduit donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2S_n}{n^2} = 1.$$

Ainsi : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)^2}{2}$.

3. Soit u la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - \frac{\ln(n)^2}{2}.$$

(a) Soit $n \geq 3$, on a : $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - \frac{\ln(n+1)^2}{2} - S_n + \frac{\ln(n)^2}{2} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n+1)^2}{2} + \frac{\ln(n)^2}{2} \end{aligned}$$

Or, en utilisant la question 2b avec $k = n+1 \geq 4$ on trouve :

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx = \left[\frac{\ln(x)^2}{2}\right]_n^{n+1}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leq \frac{\ln(n+1)^2}{2} - \frac{\ln(n)^2}{2}.$$

On en déduit alors que : $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

(b) D'après la question précédente, la suite u est décroissante à partir du rang $n = 3$.

D'après la question **2.(c)**, on sait également que pour tout $n \geq 4$, on a :

$$\frac{\ln(n+1)^2}{2} - a \leq S_n - b$$

donc, en ajoutant $b - \dfrac{\ln(n)^2}{2}$ membre à membre on obtient

$$\forall n \geq 4, \quad \frac{\ln(n+1)^2}{2} - \frac{\ln(n+1)^2}{2} + b - a \leq u_n.$$

La croissance de la fonction logarithme permet alors de conclure :

$$\forall n \geq 4, \quad b - a \leq u_n.$$

Ainsi la suite u est minorée.

Étant décroissante et minorée, d'après le théorème de la limite monotone, u est convergente.

4. On considère désormais la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{\ln(n)}{n}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

— On a d'une part :

$$\begin{aligned}
V_{n+1} - V_n &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} \\
&= (-1)^{2n+1}\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + (-1)^{2n}\frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \\
&= \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

car f est décroissante sur $[e, +\infty[$ et $2n+2 \geq 2n+1 \geq 3 \geq e$.
De même :

$$\begin{aligned}
W_{n+1} - W_n &= \sum_{k=1}^{2(n+1)+1} (-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} \\
&= (-1)^{2n+2}\frac{\ln(2n+3)}{2n+3} + (-1)^{2n+1}\frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \\
&= \frac{\ln(2n+3)}{2n+3} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

car f est décroissante sur $[e, +\infty[$ et $2n+3 \geq 2n+2 \geq e$.

— D'autre part :

$$W_n - V_n = \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln(2n)}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par croissance comparée.

Les suites U et V sont donc adjacentes. On en déduit qu'elles convergent vers une même limite ℓ.

Comme il s'agit des suites extraites d'ordre pair et impair de la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on en déduit que cette suite converge vers ℓ également.

Cela signifie que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{\ln(n)}{n}$ est convergente et que sa somme est ℓ.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$:

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} = S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

— **Initialisation :** pour $n = 1$ on a d'une part :

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} = -\frac{\ln(2)}{2}$$

et d'autre part :

$$S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{\ln(2)}{2} - \ln(2) = . - \frac{\ln(2)}{2}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

— **Hérédité :**soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2(n+1)}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} &= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \\
&= S_{2n} - S_n - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \quad \text{(HR)} \\
&= S_{2n+2} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} - S_{n+1} + \frac{\ln(n+1)}{n+1} \\
&\quad - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{\ln(2n+2)}{2n+2} + \frac{\ln(2n+1)}{2n+1} \\
&= S_{2(n+1)} - S_{n+1} - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{\ln(2n+2)}{n+1} + \frac{\ln(n+1)}{n+1} \\
&= S_{2(n+1)} - S_{n+1} - \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{\ln(2)+\ln(n+1)}{n+1} + \frac{\ln(n+1)}{n+1} \\
&= S_{2(n+1)} - S_{n+1} - \ln(2)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion :** par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a d'après la question précédente, en notant $A_n = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{\ln(k)}{k}$, on a :

$$\begin{aligned}
\ln(2)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) &= S_{2n} - S_n - A_n - \ln(2)\ln(n) \\
&= u_{2n} + \frac{\ln(2n)^2}{2} - u_n - \frac{\ln(n)^2}{2} - A_n - \ln(2)\ln(n) \\
&= u_{2n} + \frac{(\ln(2)+\ln(n))^2}{2} - u_n - \frac{\ln(n)^2}{2} - A_n - \ln(2)\ln(n) \\
&= u_{2n} - u_n + \frac{\ln(2)^2}{2} - A_n.
\end{aligned}$$

Or on sait que la suite u converge donc $(u_{2n} - u_n)_n$ converge vers 0 , et (A_n) converge vers ℓ. Ainsi, on en déduit par somme que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite est :

$$\frac{\ln(2)^2}{2} - \frac{\ell}{\ln(2)}.$$

Exercice 2

On considère une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules noires indiscernables au toucher.
On pose $N = N_1 + N_2$.
On répète l'expérience suivante : on tire au hasard (uniformément) une boule dans l'urne et on replace dedans deux boules de la couleur obtenue.
À l'issue de la première expérience, l'urne contient donc $N + 1$ boules et on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne.
À l'issue de la deuxième expérience, l'urne contient donc $N + 2$ boules et on note X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne.
Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue de la k-ième répétition de l'expérience.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note B_k l'événement « la boule tirée lors de la k-ième expérience est blanche ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

(a) D'après le cours de première année : $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$: « $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ». Prouvons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

— **Initialisation :** on a $\frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$ et $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

— **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{(n+1)\left(n(2n+1)+6(n+1)\right)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left(n(2n+3-2)+6(n+1)\right)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left(n(2n+3)+4n+6\right)}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left(n(2n+3)+2(2n+3)\right)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n+3)(n+2)}{6}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion :** par récurrence, on a prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(c) La variable X possède une variance donnée, d'après la formule de Koenig-Huygens, par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Or par le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Finalement, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{n+1}{2}\left(\frac{2n+1}{3} - \frac{n+1}{2}\right) \\
&= \frac{n+1}{2} \times \frac{4n+2-3n-3}{6} \\
&= \frac{n^2-1}{12}.
\end{aligned}$$

2. On suppose dans cette question uniquement que $N_1 = N_2 = 1$.

(a) On a $X_1(\Omega) = [\![1,2]\!]$. De plus :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(\overline{B}_1) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2}.$$

Donc X_1 suit une loi uniforme sur $[\![1,2]\!]$.

On a $X_2(\Omega) = [\![1,3]\!]$. De plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2=2) &= \mathbb{P}(B_1 \cap \overline{B}_2) + \mathbb{P}(\overline{B}_1 \cap B_2) \\ &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(\overline{B}_2) + \mathbb{P}(\overline{B}_1)\mathbb{P}_{\overline{B}_1}(B_2) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X_2=3) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

et

$$\mathbb{P}(X_2=1) = \mathbb{P}(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2) = \mathbb{P}(\overline{B}_1)\mathbb{P}_{\overline{B}_1}(\overline{B}_2) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Donc X_2 suit une loi uniforme sur $[\![1,3]\!]$.

(b) Compléter le programme suivant prenant en entrées des entiers N_1, N_2 et k et simulant la variable aléatoire X_k :

```python
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

def X(N1,N2,k):
    Nb_blanche = N1
    Nb_noire = N2
    for i in range(k):
        if rd.rand()< Nb_blanche/(Nb_blanche+Nb_noire):
            Nb_blanche+=1
        else :
            Nb_noire+=1
    return Nb_blanche
```

(c) Lorsqu'on fait un grand nombre de simulation de X_3 (ici 100 000), on constate les fréquences auxquelles les événements $[X_3 = 1]$, $[X_3 = 2]$, $[X_3 = 3]$ et $[X_3 = 4]$ se réalisent sont sensiblement égales à 0.25. On peut donc conjecture que X_3 suit la loi $\mathcal{U}([\![1,4]\!]$.

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété « X_n suit une loi uniforme sur $[\![1,n+1]\!]$ ».

— **Initialisation :** c'est la question précédente.

— **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que X_n suit une loi uniforme sur $[\![1,n+1]\!]$. Montrons que X_{n+1} suit une loi uniforme sur $[\![1,n+2]\!]$.

Soit $k \in [\![1,n+2]\!]$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = i])_{i\in[\![1,n+1]\!]}$ on a :

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=k) = \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}_{[X_n=i]}(X_{n+1}=k)\mathbb{P}(X_n=i).$$

Or entre le n et $(n+1)$ ième tirage, le nombre de boule blanche est soit le même si on tire une noire au n-ième tirage, soit augmente de 1 si n tire une blanche au n-ième tirage. Par conséquent :

$$\forall i \notin \{k-1, k\}, \quad \mathbb{P}_{[X_n=i]}(X_{n+1}=k) = 0.$$

Donc :

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=k) = \mathbb{P}_{[X_n=k-1]}(X_{n+1}=k)\mathbb{P}(X_n=k-1) + \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k)\mathbb{P}(X_n=k).$$

Si $k=1$ on trouve :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}=1) &= \mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1}=1)\mathbb{P}(X_n=0) + \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1}=1)\mathbb{P}(X_n=1)\\ &= 0 + \frac{n+1}{n+2} \times \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Si $k \in [\![2, n+2]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}=k) &= \mathbb{P}_{[X_n=k-1]}(X_{n+1}=k)\mathbb{P}(X_n=k-1) + \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1}=k)\mathbb{P}(X_n=k)\\ &= \frac{k-1}{n+2} \times \frac{1}{n+1} + \frac{n+2-k}{n+2} \times \frac{1}{n+1}\\ &= \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— **Conclusion :** d'après le principe de récurrence pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On applique la formule des probabilités totales avec le SCE $([X_n=k])_{k\in[\![1,n+1]\!]}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1})\mathbb{P}(X_n=k)\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}_{[X_n=k]}(B_{n+1})\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{n+2}\end{aligned}$$

car sachant $[X_n=k]$ l'urne contient k blanches pour $n+2$ boules lors du $(n+1)$-ième tirage.
Finalement

$$\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{n+2} = \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+2)} = \frac{1}{2}.$$

3. On retourne désormais au cas général.

(a) Lors du premier tirage il y a N_1 boules blanches et $N = N_1 + N_2$ boules au total. Donc $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{N_1}{N_1 + N_2}$.

Lors du deuxième tirage :

— si une boule blanche a été tirée au premier tirage, il y a $N_1 + 1$ boules blanches et $N + 1$ boules au total ;

— si une boule noire a été tirée au premier tirage, il y a N_1 boules blanches et $N + 1$ boules au total.

Par la formule des probabilités totales, on en déduit :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}_{B_1}(B_2)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}_{\overline{B}_1}(B_2)\mathbb{P}(\overline{B}_1)\\ &= \frac{N_1+1}{N+1} \times \frac{N_1}{N} + \frac{N_1}{N+1} \times \frac{N-N_1}{N}\\ &= \frac{N_1}{N}.\end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$.

i. Par définition de l'expérience aléatoire et de X_{n-1}, on a : $X_{n-1}(\Omega) = [\![N_1, N_1+n-1]\!]$ (on début avec N_1 boules blanches et à l'issue du $(n-1)$-ième tirage on en a rajouté au plus $(n-1)$).

Par la formule des probabilités totales avec le SCE $([X_{n-1} = k])_{k\in[\![N_1,N_1+n-1]\!]}$ on obtient :

$$\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]}(B_n)\mathbb{P}(X_{n-1} = k).$$

Or sachant $[X_{n-1} = k]$, l'urne contient k boules blanche et $N+n-1$ boules au total donc :

$$\mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]}(B_n) = \frac{k}{N+n-1}.$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \frac{k}{N+n-1}\mathbb{P}(X_{n-1} = k)$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} k\mathbb{P}(X_{n-1} = k) = (N+n-1)\mathbb{P}(B_n).$$

ii. Soit $k \in [\![N_1, N_1+n-1]\!]$.

Sachant $B_n \cap [X_{n-1} = k]$, l'urne à l'issue du n-ième tirage contient $k+1$ boules blanches : les k qui étaient là à l'issue du $(n-1)$-ième tirage ($[X_{n-1} = k]$) et celle qu'on a rajouté à l'issue du n-ième tirage. D'où :

$$\mathbb{P}_{B_n\cap[X_{n-1}=k]}(B_{n+1}) = \frac{k+1}{N+n}.$$

Sachant $\overline{B}_n \cap [X_{n-1} = k]$, l'urne à l'issue du n-ième tirage contient k boules blanches : les k qui étaient là à l'issue du $(n-1)$-ième tirage ($[X_{n-1} = k]$)

– on n'en rajoute à l'issue du n-ième tirage car on obtient une noire au n-ième ($\overline{B}_n$). D'où :

$$\mathbb{P}_{\overline{B}_n\cap[X_{n-1}=k]}(B_{n+1}) = \frac{k}{N+n}.$$

iii. D'après la formule des probabilités totales avec le SCE $(B_n \cap [X_{n-1}=k])_{k\in[\![N_1,N_1+n-1]\!]} \cup (\overline{B}_n \cap [X_{n-1}=k])_{k\in[\![N_1,N_1+n-1]\!]}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_{n+1}) &= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]\cap B_n}(B_{n+1})\mathbb{P}([X_{n-1}=k]\cap B_n) \\
&+ \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]\cap \overline{B}_n}(B_{n+1})\mathbb{P}([X_{n-1}=k]\cap \overline{B}_n) \\
&= \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \left(\frac{k+1}{N+n}\mathbb{P}([X_{n-1}=k]\cap B_n) + \frac{k}{N+n}\mathbb{P}([X_{n-1}=k]\cap \overline{B}_n)\right).
\end{aligned}$$

Or avec les probabilités totales :

$$\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \mathbb{P}(B_n \cap [X_{n-1}=k])$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_{n+1}) &= \frac{\mathbb{P}(B_n)}{N+n} + \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \frac{k}{N+n}\left(\mathbb{P}([X_{n-1}=k]\cap B_n) + P([X_{n-1}=k]\cap \overline{B}_n)\right) \\
&= \frac{\mathbb{P}(B_n)}{N+n} + \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} \frac{k}{N+n}\left(\mathbb{P}([X_{n-1}=k]\right) \\
&= \frac{\mathbb{P}(B_n)}{N+n} + \frac{N+n-1}{N+n}\mathbb{P}(B_n).
\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}(B_{n+1}) = \mathbb{P}(B_n)$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, $(\mathbb{P}(B_n))_n$ est constante donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{N_1}{N}.$$

De plus, **3.(b)i** montre que :

$$\mathbb{E}(X_n) = (N+n)\mathbb{P}(B_{n+1}) = \frac{N_1(N+n)}{N}.$$

Exercice 3

Soit $E_2 = \left\{ M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ ; \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. (a) On a :

$$\begin{aligned} E_2 &= \left\{ M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ ; \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Donc E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) D'après la question précédente, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de E_2. Elle est formée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est libre.

Ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E_2 et $\dim(E_2) = 2$.

2. Soit $M = M_{a,b}$ et $N = M_{a',b'}$ deux éléments de E_2. On a :

$$MN = \begin{pmatrix} aa' + bb' & ab' + b'a \\ ba' + ab' & bb' + aa' \end{pmatrix} = NM.$$

3. Soit $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(a) D'abord, on constate que $U = M_{1/2,1/2}$ et $V = M_{1/2,-1/2}$ donc U et V sont bien des éléments de E_2.

Soit λ, μ deux réels. On a :

$$\begin{aligned} \lambda U + \mu V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu &=& 0 \\ \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \mu &=& 0 \\ \lambda &=& 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

La famille (U, V) est donc libre.

C'est une famille libre de E_2 de cardinal $2 = \dim(E_2)$ donc c'est une base de E_2.

(b) Un calcul montre que $U^2 = U$ et $V^2 = V$. Une récurrence immédiate permet alors de conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$U^n = U \quad \text{et} \quad V^n = V.$$

Par ailleurs, on vérifie que $UV = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$.

(c) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Commençons par traiter le cas $n = 1$. Soit λ, μ deux réels. On a :

$$\lambda U + \mu V = M_{a,b} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu & = & a \\ \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}\mu & = & b \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu & = & a \\ \lambda & = & a+b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \mu & = & a-b \\ \lambda & = & a+b \end{array} \right.$$

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme de Newton (qu'on peut utiliser en vertu de la question **2**), on a :

$$\begin{aligned} M_{a,b}^n &= ((a+b)U + (a-b)V)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a+b)^k (a-b)^{n-k} U^k V^{n-k} \\ &= (a+b)^n U^n + (a-b)^n V^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (a+b)^k (a-b)^{n-k} U^k V^{n-k} \\ &= (a+b)^n U + (a-b)^n V + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (a+b)^k (a-b)^{n-k} UV \\ &= (a+b)^n U + (a-b)^n V \end{aligned}$$

où les deux dernières lignes s'obtiennent par la question précédente.

Les coordonnées de $M_{a,b}^n$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont donc $((a+b)^n, (a-b)^n)$.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $c \neq d$. On note :

$$A = M_{a,b,c,d} = \begin{pmatrix} c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

4. Le cas $n = 0$ est trivial. Montrons le reste par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

— **Initialisation :** c'est immédiat pour $n = 1$.

— **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que :

$$A^n = \begin{pmatrix} c^n & 0 & \frac{d^n - c^n}{d-c} a & \frac{d^n - c^n}{d-c} b \\ 0 & c^n & \frac{d^n - c^n}{d-c} b & \frac{d^n - c^n}{d-c} a \\ 0 & 0 & d^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^n \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$A^{n+1} = AA^n = [\text{calcul}] = \begin{pmatrix} c^{n+1} & 0 & \frac{d^{n+1} - c^{n+1}}{d-c} a & \frac{d^{n+1}n - c^{n+1}}{d-c} b \\ 0 & c^{n+1} & \frac{d^{n+1} - c^{n+1}}{d-c} b & \frac{d^{n+1} - c^{n+1}}{d-c} a \\ 0 & 0 & d^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n + 1$.

— Conclusion : par récurrence, le résultat est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Pour tout réel z on note E_z l'ensemble :

$$E_z = \{X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid AX = zX\}.$$

(a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

— On a :

$$X \in E_c \iff AX = cX \iff \left\{\begin{array}{ccc} cx + az + bt & = & cx \\ cy + bz + at & = & cy \\ dz & = & cz \\ dt & = & ct \end{array}\right. \iff z = t = 0$$

car $c \neq d$.
Ainsi :

$$E_c = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \ x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

En particulier E_c est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de E_c et libre (car formée de deux vecteurs non-colinéaires) donc c'est une base de E_c.

— De même :

$$X \in E_d \iff AX = cX \iff \left\{\begin{array}{ccc} cx + az + bt & = & dx \\ cy + bz + at & = & dy \\ dz & = & dz \\ dt & = & dt \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} (d-c)x = az + bt \\ (d-c)y = bz + at \end{array}\right.$$

Ainsi ($d \neq c$) :

$$E_d = \left\{ \begin{pmatrix} (az+bt)/(d-c) \\ (bz+at)/(d-c) \\ z \\ t \end{pmatrix} \ ; \ z, t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ d-c \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \\ d-c \end{pmatrix} \right).$$

En particulier E_d est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
La famille $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ d-c \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \\ d-c \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de E_d et libre (car formée de deux vecteurs non-colinéaires) donc c'est une base de E_d.

(b) Notons $\mathcal{C} = \mathcal{B}_c \cup \mathcal{B}_d = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ d-c \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \\ d-c \end{pmatrix} \right)$.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} a \\ b \\ d-c \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} b \\ a \\ 0 \\ d-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + a\lambda_3 + b\lambda_4 & = & 0 \\ \lambda_2 + b\lambda_3 + a\lambda_4 & = & 0 \\ (d-c)\lambda_3 & = & 0 \\ (d-c)\lambda_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{car } d \neq c.$$

Ainsi la famille $\mathcal{C}$ est libre. Or c'est une famille de cardinal 4 de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})) = 4$.
Par conséquent, $\mathcal{C}$ est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

(c) Soit $i \in [\![1, 4]\!]$ et notons $M = (m_{i,j})$ et $e_i = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_4 \end{pmatrix}$ le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. Par définition de la base canonique :

$$x_j = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$$

Alors en notant $[Me_i]_k$ la k-ième coordonnée de Me_i on a par définition du produit matriciel :

$$[Me_i]_k = \sum_{j=1}^{4} m_{k,j} x_j = m_{k,i}.$$

Donc :

$$Me_i = \begin{pmatrix} m_{1,i} \\ m_{2,i} \\ m_{3,i} \\ m_{4,i} \end{pmatrix}$$

qui est bien la i-ème colonne de M.

(d) Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & b & a \\ 0 & 0 & d-c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{pmatrix}$ qui est bien inversible car ses colonnes sont les éléments de $\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_4)$ (cf question **5.(c)**) qui est une base.
D'après la question précédente on a pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$:

$$Pe_i = C_i$$

donc

$$APe_i = AC_i = \left\{ \begin{array}{ll} cC_i & \text{si } i = 1, 2 \\ dC_i & \text{si } i = 3, 4 \end{array} \right.$$

d'après**5.(a)**.
Finalement pour tout $i \in [\![1,4]\!]$:

$$P^{-1}APe_i = \left\{ \begin{array}{ll} cP^{-1}C_i & \text{si } i=1,2 \\ dP^{-1}C_i & \text{si } i=3,4 \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ll} ce_i & \text{si } i=1,2 \\ de_i & \text{si } i=3,4 \end{array} \right.$$

car $e_i = P^{-1}C_i$.
D'après la question précédente, cela signifie que les colonnes de $P^{-1}AP$ sont

$$\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}.$$

Donc : $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$.