Chapitre 9

Variables aléatoires discrètes

Dans tout le paragraphe, X désigne une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

9.3 Lois usuelles

9.3.1 Lois usuelles finies

Loi certaine

1. On dit que X suit la loi certaine si elle ne prend qu'une seule valeur $a \in \mathbb{R}$:

$$X(\Omega) = \{a\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = a) = 1.$$

2. Si X suit une loi certaine avec $X(\Omega) = \{a\}$ alors

$$\mathbb{E}(X) = a \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 0.$$

3. Une variable aléatoire X suit une loi certaine si et seulement si $\mathbb{V}(X) = 0$.

Preuve : (du point 3 dans le cas où X est discrète).

□

Loi de Bernoulli

Soit $p \in]0,1[$.

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ si :
   i) $X(\Omega) = \{0,1\}$
   ii) $\mathbb{P}(X=1) = p$ et $\mathbb{P}(X=0) = 1-p$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors
$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = p(1-p).$$

Expérience de référence. On considère une expérience aléatoire possédant deux issues :

— une issue nommée « succès » qui se produit avec probabilité p ;

— l'autre nommée « échec » qui produit avec probabilité $1-p$

(une telle expérience est appelée une épreuve de Bernoulli).
La variable aléatoire X égale à 1 en cas de succès et à 0 en cas d'échec suit une loi $\mathcal{B}(p)$.

Exemple 9.1 (**Fonction indicatrice**). Soit $A \in \mathcal{A}$ un événement. On note 1_A la variable aléatoire définie par :

$$\begin{aligned} 1_A : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Il s'agit d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$.

Loi binomiale

Soient $p \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Binomiale de paramètres n et p, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ si :
   i) $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$
   ii) $\forall k \in= [\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ alors
$$\mathbb{E}(X) = np \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = np(1-p).$$

Expérience de référence. On considère une expérience aléatoire qui consiste à répéter n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p.
La variable aléatoire X égale au nombre de succès suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$.

Exemple 9.2. On considère une pièce ayant probabilité p de tomber sur Pile et $1-p$ de tomber sur Face. On lance n fois consécutives cette pièce et on note X la variable aléatoire égale au nombre de Piles obtenues . Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

Loi uniforme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de uniforme sur $[\![1, n]\!]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ si :
   i) $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$
   ii) $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}.$$

Expérience de référence On considère une expérience aléatoire qui possède n issues différentes numérotées de 1 à n qui sont équiprobables.
La variable aléatoire X égale à i si l'issue i est obtenue suit une loi $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$.

Remarque 9.1. Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $a < b$.

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de uniforme sur $[\![a, b]\!]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$ si :
   i) $X(\Omega) = [\![a, b]\!]$
   ii) $\forall k \in [\![a, b]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{b-a+1}$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)(b-a+2)}{12}.$$

9.3.2 Lois usuelles discrètes infinies

Loi géométrique

Soit $p \in]0, 1[$.

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de géométrique de paramètre p, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ si :
   i) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
   ii) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ alors X possède une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

3. **Expérience de référence** : on considère une expérience aléatoire qui consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.
   La variable aléatoire X donnant le rang du premier succès obtenu suit une loi $\mathcal{G}(p)$.

Preuve : Soit $p \in]0,1[$.

1. Il faut montrer qu'on définit bien un loi de probabilité, c'est-à-dire :
   (a) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p(1-p)^{k-1} \in [0,1]$;
   (b) $\sum_{k\geq 1} p(1-p)^{k-1}$ converge et sa somme vaut 1.

   À faire en exercice.
2. À faire en exercice.
3. On réalise une succession infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p et on note X la variable aléatoire donnant le rang du premier succès obtenu. On a alors $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
   Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note S_i : « avoir un succès à la i-ième répétition ».
   Alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(\overline{S}_1 \cap \overline{S}_2 \cap \cdots \cap \overline{S}_{k-1} \cap S_k) \\ &= \mathbb{P}(\overline{S}_1)\mathbb{P}(\overline{S}_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(\overline{S}_{k-1})\mathbb{P}(S_k))\end{aligned}$$

   par indépendance des lancers. D'où :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}(\overline{S}_1)\mathbb{P}(\overline{S}_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(\overline{S}_{k-1})\mathbb{P}(S_k) \\ &= (1-p)^{k-1}p\end{aligned}$$

   Finalement, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et X suit la loi géométrique de paramètre p.

□

Exemple 9.3. On considère une pièce ayant probabilité p de tomber sur Pile et $1-p$ de tomber sur Face. On lance la pièce une infinité de fois consécutives et note X la variable égale au rang de la première apparition d'un Pile. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Exemple 9.4 (Simulation d'une loi géométrique). Pour rappel (cf TP3) la fonction `rd.rand()` de la bibliothèque `random.numpy` tire un nombre aléatoire de $[0,1[$ selon la loi :

$$\mathbb{P}(\texttt{rd.rand()} \in I) = \text{longueur}(I)$$

pour tout intervalle $I \subset [0,1[$.

```
def simule_geo(p):
        succes = 0  # 0 pour un échec , 1 pour un succes
        nb_essais = 0
        while succes == 0:
                if rd.rand()<p:
                        succes = 1
                nb_essais += 1
        return nb_essais
```

Proposition 9.1 (Absence de mémoire)

Soit $p \in]0,1[$ et X une variable aléaoire suivant la loi $\mathcal{G}(p)$. Alors, pour tout $(s,t) \in (\mathbb{N}^*)^2$ on a :

$$\mathbb{P}(X > t+s) = \mathbb{P}(X>t)\mathbb{P}(X>s).$$

Preuve : Exercice. □

Loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$.

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ si :
   i) $X(\Omega) = \mathbb{N}$
   ii) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors X possède une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Preuve : Soit $\lambda > 0$.

1. Il faut montrer qu'on définit bien un loi de probabilité, c'est-à-dire :
   (a) $\forall k \in \mathbb{N}$, $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} \in [0, 1]$;
   (b) $\displaystyle\sum_{k \geq 0} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ converge et sa somme vaut 1.

   À faire en exercice.
2. À faire en exercice.

□