Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD9

Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. Un lot contient 10 pièces dont 3 défectueuses. On tire simultanément et au hasard 2 pièces de ce lot. Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de pièces défectueuses parmi les pièces tirées.

1. Modéliser la situation à l'aide d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
2. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 2. Un joueur lance n fois un dé équilibré à 6 faces. Il gagne 1 euro s'il tombe sur un nombre pair et rien sinon. On note X la variable aléatoire qui compte les gains du joueur. Reconnaître la loi de X. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 3. Soit $p > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$p_k = \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}}.$$

1. Justifier qu'il existe une variable aléatoire discrète X telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = p_k.$$

2. La variable aléatoire X possède-t-elle une espérance ? Une variance ?
   En cas d'existence, les calculer.

Exercice 4. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = \dfrac{a}{k^2}$ où $a > 0$.

1. Déterminer a pour que $p = (p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ soit la loi d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
2. On considère X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ ayant pour loi p. Admet-elle une espérance ?

Exercice 5. Les pandas étant en voie de disparition, on souhaite réaliser une réserve en considérant qu'il faut au moins r mâles et r femelles.
On en attrape suffisamment dans la nature, les mâles avec une probabilité p et les femelles avec une probabilité $q = 1 - p$ de sorte à obtenir au moins r mâles et r femelles. On note X le nombre total de pandas attrapés.

1. Quel est l'ensemble des valeurs possibles prises par X ?
2. Notons G_n le genre du n-ième panda, plus précisément $G_n = 1$ si c'est un mâle, 0 si c'est une femelle. La variable M_n désigne le nombre de mâles capturés parmi les n premiers pandas et F_n le nombre de femelles
   (a) Reconnaître la loi de G_n et exprimer M_n et F_n en fonction des G_i, $i \in \mathbb{N}$ et reconnaître leur loi.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $[X \leq n] = [M_n \geq r] \cap [F_n \geq r]$
   (c) En déduire la loi de X.
   On doit trouver $\mathbb{P}(X = n) = \dbinom{n-1}{r-1}(p^{n-r}q^r + p^r q^{n-r})$ *pour* $n \geq 2r$.

3. (a) Que devient la loi de X si $p = q = \frac{1}{2}$? En déduire que

$$\sum_{n=2r}^{+\infty} \binom{n-1}{r-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1.$$

   Indication : on admettra que $\mathbb{P}(X = \infty) = 0$.

   (b) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 6. Un mobile se déplace sur un axe de la façon suivante :

— à l'instant 0, il est au point d'abscisse 0 ;

— si à l'instant n, le mobile est au point d'abscisse $k \in \mathbb{N}$ alors à l'instant $n+1$ soit il passe au point d'abscisse $k+1$ avec probabilité $p \in]0,1[$ soit il retourne à 0 avec probabilité $1-p$.

On note X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du mobile à l'instant n.

1. (a) Écrire une fonction Python qui prend en entrées n et p et simule une réalisation de X_n.

   (b) À l'aide de cette fonction donner une valeur approchée de $\mathbb{E}(X_n)$.
2. Déterminer la loi de X_1.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X_n.

   (b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Trouver une relation entre $\mathbb{P}(X_n = k)$ et $\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1)$.

   (c) En déduire une relation de récurrence entre $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(X_{n-1})$ pour tout $n \geq 1$.

   (d) En déduire l'expression de $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et p.

Exercice 7. Dans un royaume lointain, il fait rarement beau deux jours de suite.

— Si un jour il fait beau, le lendemain il fait moche avec probabilité $\frac{2}{3}$.

— Si un jour il fait moche, il y une chance sur deux que la météo change le lendemain.

On note pour tout $n \geq 1$, X_n la variable aléatoire valant 1 si au jour n il fait beau et 0 s'il fait moche.

Enfin, pour tout $n \geq 1$:

$$Z_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 0) \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$Z_{n+1} = AZ_n.$$

2. Soit $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier que P est inversible et déterminer son inverse.

   (b) Calculer $D = P^{-1}AP$.
3. (a) Écrire une fonction `simul(n,meteo_init)` qui prend en argument un entier $n \geq 1$ et une météo initiale et renvoie une simulation de X_n.

(b) Avec les différentes valeurs de `meteo_init`, donner des valeurs approchées de :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0)$$

(en admettant que ces limites existent).

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = P^{-1}Z_n$.
   (a) À l'aide de la question 2.b, déterminer Y_n pour tout $n \geq 1$.
   (b) En déduire Z_n.
   (c) Confirmer ou infirmer l'observation numérique.

Exercice 8. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $p \in]0,1[$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$.
2. En déduire que $\forall (k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad \mathbb{P}_{[X>l]}(X > k+l) = \mathbb{P}(X > k)$.

Exercice 9. Une urne contient a boules blanches et b boules noires (a et b sont des entiers naturels non nuls). On effectue une infinité de tirages avec remise.

1. Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule blanche.
   (a) Reconnaître la loi de X_1.
   (b) En déduire $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_1)$.
2. Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang de tirage de la deuxième boule blanche.
   (a) Déterminer la loi de X_2.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(X_2)$.

Exercice 10. Soit N une v.a. suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ pour un certain $\lambda > 0$ fixé.

1. Quelle est la probabilité que N soit pair ? impair ? lequel des deux événements est le plus probable ?
2. Calculer, puis comparer $\mathbb{P}_{(N\geq 1)}(N \text{ est pair})$ et $\mathbb{P}_{(N\geq 1)}(N \text{ est impair})$.

Exercice 11. Dans chaque cas, justifier que Y possède une espérance et calculer $E(Y)$.

1. $Y = n - X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$,
2. $Y = 2^X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$,
3. $Y = 2^X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$,
4. $Y = \dfrac{1}{X+1}$ où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Exercice 12. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer l'inégalité suivante pour tout $a > 0$:

$$\mathbb{P}(|X - \lambda| \geq a) \leq \frac{\lambda}{a^2}.$$

Exercice 13. Soit θ, ε des réels strictement positifs et $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.
On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et suivant la loi $\mathcal{B}(p)$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Établir : $\mathbb{P}(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{n\theta\overline{X}_n} \geq e^{n\theta(p+\varepsilon)})$.
2. Déduire : $\mathbb{P}(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon) \leq e^{n\left(\ln(pe^{\theta}+q) - \theta(p+\varepsilon)\right)}$.