Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD9

Variables aléatoires discrètes

Correction de l'exercice 1.

1. L'univers Ω est l'ensemble des parties de 2 pièces parmi les 10 : il est donc constitué de $\binom{10}{2}$ éléments.

   On prend comme tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et comme probabilité la probabilité uniforme.

2. On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

   — L'événement $[X = 0]$ est réalisé si et seulement si les deux pièces tirées sont tirées parmi les 7 pièces non défectueuses. Il y a donc $\binom{7}{2}$ possibilités :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{7!2!8!}{2!5!10!} = \frac{21}{45}.$$

   — L'événement $[X = 1]$ est réalisé si et seulement si une pièce est tirée parmi les 3 défectueuses et l'autre parmi les 7 pièces non défectueuses. Il y a donc $\binom{7}{1}\binom{3}{1}$ possibilités :

$$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{21}{45}.$$

   — L'événement $[X = 2]$ est réalisé si et seulement si les deux pièces sont tirées parmi les 3 défectueuses. Il y a donc $\binom{3}{2}$ possibilités :

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{3}{45}.$$

   On obtient alors :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \frac{21}{45} + 1 \times \frac{21}{45} + 2 \times \frac{3}{45} = \frac{27}{45}.$$

   Pour la variance, en utilisant la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2 \times \frac{21}{45} + 1^2 \times \frac{21}{45} + 2^2 \times \frac{3}{45} = \frac{33}{45}$$

   puis

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{33}{45} - \left(\frac{27}{45}\right)^2 = \frac{45 \times 33 - 27^2}{45^2} = \frac{28}{75}.$$

Correction de l'exercice 2. La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition indépendante de n épreuves de Bernoulli dont le succès est « tomber sur un nombre pair ».

Il s'agit donc d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,p)$ où :

$$p = \mathbb{P}(\text{« tomber sur un nombre pair »}) = \frac{1}{2}.$$

En particulier,

$$\mathbb{E}(X) = np = \frac{n}{2} \quad ; \quad \mathbb{V}(X) np(1-p) = \frac{n}{4}.$$

Correction de l'exercice 3. Soit $p > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$p_k = \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}}.$$

1. On a :
   — Pour tout $k \in \mathbb{N}$: $0 \leq p_k \leq 1$.
   — Montrons que $\sum_{k \geq 0} p_k$ converge et que sa somme vaut 1.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

   $$p_k == \frac{p^k}{(1+p)^{k+1}} = \frac{1}{1+p}\left(\frac{p}{p+1}\right)^k.$$

   La série $\sum_{k \geq 0} p_k$ est donc un multiple de la série géométrique de raison $\frac{p}{1+p} \in]0,1[$. Elle est donc convergente et :

   $$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = \frac{1}{1+p}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{p}{p+1}\right)^k = \frac{1}{p+1}\frac{1}{1-\frac{p}{p+1}} = 1.$$

   D'après le cours, il existe une variable aléatoire discrète X telle que :

   $$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = p_k.$$

2. La variable aléatoire X possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} kp_k$ est absolument convergente. Or il s'agit d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 (à un facteur constant près) de raison $\frac{p}{p+1} \in [0,1[$. Elle est donc absolument convergente et X possède bien une espérance :

   $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kp_k = \frac{p}{(1+p)^2}\sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\frac{p}{p+1}\right)^{k-1} = \frac{p}{(1+p)^2}\frac{1}{\left(1-\frac{p}{(1+p)}\right)^2} = p.$$

   De même, X possède une variance si et seulement si la série $\sum_{k \geq 0} k^2 p_k$ est absolument convergente. Or pour tout $k \geq 0$:

   $$k^2 pk = k(k-1)p_k + kp_k.$$

Il s'agit donc d'une combinaison linéaire d'une série géométrique dérivée d'ordre 1 et d'ordre 2 de raison $\dfrac{p}{p+1} \in [0,1[$. Elle est donc absolument convergente et X possède bien une espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 p_k &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k(k-1)p_k + kp_k) \\
&= \frac{p^2}{(1+p)^3} \sum_{k=0}^{+\infty} k \left(\frac{p}{p+1}\right)^{k-2} + p \\
&= \frac{p^2}{(1+p)^3} \frac{2}{\left(1 - \frac{p}{(1+p)}\right)^3} + p \\
&= 2p^2 + p
\end{aligned}$$

puis par Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = p^2 + p.$$

Correction de l'exercice 4. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = \dfrac{a}{k^2}$.

1. Comme $a > 0$, les p_k sont tous positifs. Par ailleurs, la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge et donc, pour que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} p_k$ vaille 1, il faut et il suffit que $a = \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}$.
   Pour cette valeur de a, $p = (p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est la loi d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
2. On considère X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ ayant pour loi p. Elle admet une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} kp_k = a \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$ est (absolument) convergente. Ce n'est pas le cas, il s'agit de la série harmonique et donc X n'admet pas d'espérance (finie).

Correction de l'exercice 5.

1. L'ensemble des valeurs possibles prises par X est $[\![2r, +\infty[\![$.
2. (a) Notons G_n le genre du n-ième panda, plus précisément $G_n = 1$ si c'est un mâle, 0 si c'est une femelle.
   Les $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille de variables de Bernoulli de paramètre de succès p. Si M_n désigne le nombre de mâles capturés parmi les n premiers pandas et F_n le nombre de femelles on a :
   $$M_n = \sum_{k=1}^{n} G_k \quad \text{et} \quad F_n = n - \sum_{k=1}^{n} G_k.$$
   Alors M_n suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$, F_n suit une loi $\mathcal{B}(n,q)$.

   (b) On a $[X \leq n] = [M_n \geq r] \cap [F_n \geq r]$. En effet, $[X \leq n]$ si et seulement si il a fallu moins de n captures pour obtenir au moins r mâles et r femelles si et seulement si parmi les n pandas capturés il y a au moins r femelles et r mâles.

(c) Donc
$$[X \leq n] = [M_n \geq r] \cap [n-r \geq M_n] = [r \leq M_n \leq n-r].$$
Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \leq n) = \displaystyle\sum_{k=r}^{n-r} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ et :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = n) &= \mathbb{P}(X \leq n) - \mathbb{P}(X \leq n-1) \\
&= \sum_{k=r}^{n-r} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} - \sum_{k=r}^{n-1-r} \binom{n-1}{k} p^k q^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=r}^{n-r} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-k} + \sum_{k=r}^{n-r} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} - \sum_{k=r}^{n-1-r} \binom{n-1}{k} p^k q^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=r}^{n-r} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-k} + \sum_{k=r-1}^{n-1-r} \binom{n-1}{k} p^{k+1} q^{n-1-k} - \sum_{k=r}^{n-1-r} \binom{n-1}{k} p^k q^{n+1-k} \\
&= \binom{n-1}{n-r} p^{n-r} q^r + \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r} \\
&= \binom{n-1}{r-1} (p^{n-r} q^r + p^r q^{n-r})
\end{aligned}$$

Remarque : une deuxième méthode par conditionnement.
On calcule $\mathbb{P}(X = n)$ en conditionnant sur le genre G_n du n-ième panda attrapé.
Soit $n \geq 2r$. On a, par la formule des probabilités totales appliquée au SCE $[G_n = 0], [G_n = 1]$,
$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}_{[G_n=1]}(X = n)\mathbb{P}(G_n = 1) + \mathbb{P}_{[G_n=0]}(X = n)\mathbb{P}(G_n = 0)$$
avec $\mathbb{P}(G_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(G_n = 0) = q = 1 - p$.
Or, on a les égalités d'événements (car $n - r \geq r$)
$$\begin{aligned}
[X = n] \cap [G_n = 1] &= [M_n = r] \cap [F_n = n-r] \cap [G_n = 1] \\
&= [M_n = r] \cap [G_n = 1] \\
&= [M_{n-1} = r-1] \cap [G_n = 1]
\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}
[X = n] \cap [G_n = 0] &= [F_n = r] \cap [M_n = n-r] \cap [G_n = 0] \\
&= [F_n = r] \cap [G_n = 0] \\
&= [F_{n-1} = r-1] \cap [G_n = 0].
\end{aligned}$$
Les variables aléatoires M_{n-1} et G_n sont indépendantes et donc
$$\mathbb{P}_{[G_n=1]}(X = n) = \mathbb{P}_{[G_n=1]}(M_{n-1} = r-1) = \mathbb{P}(M_{n-1} = r-1) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1} q^{n-1-(r-1)}$$
et
$$\mathbb{P}_{[G_n=1]}(X = n)\mathbb{P}(G_n = 1) = \binom{n-1}{r-1} p^r q^{n-r}.$$

De même,
$$\mathbb{P}_{[G_n=0]}(X=n)\mathbb{P}(G_n=0)=\binom{n-1}{r-1}q^r p^{n-r}.$$

3. (a) On a $\mathbb{P}(X=n)=\binom{n-1}{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
$$\sum_{n=2r}^{+\infty}\binom{n-1}{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\mathbb{P}(X\geq 2r)=1$$
(la convergence étant garantie par σ-additivité).

(b) On a
$$n\binom{n-1}{r-1}=n.\frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}=r\binom{n}{r}.$$
Donc, pour tout $N\geq 2r$:
$$\sum_{n=2r}^{N}=n\mathbb{P}(X=n)$$
$$=\sum_{n=2r}^{N}n.\binom{n-1}{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=r\sum_{n=2r}^{N}\binom{n}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=2r\sum_{n=2r+1}^{N+1}\binom{n-1}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=2r\left(\binom{2r}{r}2^{-2r}+\sum_{n=2(r+1)}^{N+1}\binom{n-1}{(r+1)-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$
et d'après la question précédente, la série $\displaystyle\sum_{n=2(r+1)}^{+\infty}\binom{n-1}{(r+1)-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ converge et sa somme vaut 1. Par conséquent, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2r}n\mathbb{P}(X=n)$ est absolument convergente donc X possède une espérance et :
$$\mathbb{E}(X)=2r\left(\binom{2r}{r}2^{-2r}+1\right).$$

Correction de l'exercice 6. 1. (a) La fonction Python :

```
import numpy.random as rd
def Simule_X(n,p):
        X = 0
        for _ in range(n):
                if rd.rand()<p:
                        X = X + 1
                else:
                        X = 0
        return X
```

(b) Pour obtenir une estimation de $\mathbb{E}(X_n)$ on répète un grand nombre de fois `Simule_X(n,p)` et on fait la moyenne des résultats obtenus (on suppose `n` et `p` déjà définis) :

```
N = 1000
S = 0
for _ in range(N):
        S = S + Simule_X(n,p)
print(S/N)
```

2. X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) On a $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

(b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

La seule façon d'être en position $k \neq 0$ à l'instant n, c'est d'être à la position $k-1$ l'instant précédent et d'avancer d'un pas.

Pmlus précisément, d'après la formule des probabilités totales avec le SCE $([X_{n-1} = k-1], [X_{n-1} \neq k-1])$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = k) &= \mathbb{P}_{[X_{n-1}=k-1]}(X_n = k)\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1) + \mathbb{P}_{[X_{n-1}\neq k-1]}(X_n = k)\mathbb{P}(X_{n-1} \neq k-1) \\ &= p\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1) + 0.\end{aligned}$$

(c) Comme X_n est de support fini, elle possède bien une espérance et on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X_n = k) &= \sum_{k=1}^{n} pk\mathbb{P}(X_{n-1} = k-1) \\ &= p\sum_{k=0}^{n-1} p(k+1)\mathbb{P}(X_{n-1} = k) \\ &= p\mathbb{E}(X_{n-1} + 1) \\ &= p\mathbb{E}(X_{n-1}) + p.\end{aligned}$$

(d) La suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\geq 1}$ est une suite arithmético-géométrique. Le point fixe associé est $\dfrac{p}{1-p}$. On vérifie que la suite $\left(\mathbb{E}(X_n) - \dfrac{p}{1-p}\right)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison p et on obtient pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{E}(X_n) = p^{n-1}\left(u_1 - \frac{p}{1-p}\right) + \frac{p}{1-p} = \frac{p(1-p^n)}{1-p}.$$

Correction de l'exercice 7. Dans un royaume lointain, il fait rarement beau deux jours de suite.

— Si un jour il fait beau, le lendemain il fait moche avec probabilité $\dfrac{2}{3}$.

— Si un jour il fait moche, il y une chance sur deux que la météo change le lendemain.

On note pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire valant 1 si au jour n il fait beau et 0 s'il fait moche.

Enfin, pour tout $n \geq 1$:

$$Z_n = \begin{pmatrix}\mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 0)\end{pmatrix}.$$

1. D'après la formule des probabilités totales avec le SCE $([X_{n-1}=1],[X_{n-1}=0])$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n=1) &= \mathbb{P}_{[X_{n-1}=1]}(X_n=1)\mathbb{P}(X_{n-1}=1)+\mathbb{P}_{[X_{n-1}=0]}(X_n=1)\mathbb{P}(X_{n-1}=0)\\ &= \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_{n-1}=1)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_{n-1}=0).\end{aligned}$$

   De même :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n=0) &= \mathbb{P}_{[X_{n-1}=1]}(X_n=0)\mathbb{P}(X_{n-1}=1)+\mathbb{P}_{[X_{n-1}=0]}(X_n=0)\mathbb{P}(X_{n-1}=0)\\ &= \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_{n-1}=1)+\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_{n-1}=0).\end{aligned}$$

   D'où :

$$Z_{n+1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}Z_n.$$

2. Soit $P=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.
   (a) On vérifie que P est inversible et que $P^{-1}=-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}4 & -3\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.
   (b) On trouve $D=\begin{pmatrix}-\frac{1}{6} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
3. (a) La fonction `simul(n,meteo_init)` :

```
import random as rd

def simul(n,meteo_init):
        X = meteo_init
        for _ in range(1,n+1):
                if X == 1:
                        if rd.rand()<2/3:
                                X = 0
                        else:
                                X = 1
                else :
                        if rd.rand()<1/2:
                                X = 1
                        else:
                                X = 0
        return X
```

   (b) Pour une grande valeur de n, on répète `simul(n,1)` un grand nombre de fois et on fait la moyenne des résultats obtenus : cela fournit une valeur approchée de $\mathbb{P}(X_n=1)$.
4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $Y_n=P^{-1}Z_n$.

(a) D'après 1 et 2.b, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$Y_{n+1} = P^{-1}Z_{n+1} = P^{-1}AZ_n = P^{-1}PDP^{-1}Z_n = DY_n.$$

Par une récurrence immédiate, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = D^nY_0 = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{6}\right)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y_0.$$

(b) On en déduit, en notant que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$Z_n = PY_n = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{6}\right)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y_0.$$

En notant $Y_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$Z_n = PY_n = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{6}\right)^n a \\ b \end{pmatrix}.$$

(c) Avec la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = -\left(-\frac{1}{6}\right)^n a + 3b \quad ; \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = \left(-\frac{1}{6}\right)^n a + 4b.$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = 3b \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 4b.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 0) = 1$$

donc en passant à la limite :

$$3b + 4b = 1 \quad \text{càd} \quad b = \frac{1}{7}.$$

Finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{3}{7} \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{4}{7}.$$

Correction de l'exercice 8. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $p \in]0,1[$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} [X = i]\right) &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = i) \quad \text{par } \sigma - \text{additivité} \\ &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} \\ &= p \sum j = 0^{+\infty}(1-p)^{j+k} \quad \text{en posant } j = i - (k+1) \\ &= p(1-p)^k \sum j = 0^{+\infty}(1-p)^j \\ &= \frac{p(1-p)^k}{1-(1-p)} \\ &= (1-p)^k. \end{aligned}$$

2. Soit $(k,\ell) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[X>\ell]}(X > k+\ell) &= \frac{\mathbb{P}([X > k+\ell] \cap [X > \ell])}{\mathbb{P}(X > \ell)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X > \ell + k)}{\mathbb{P}(X > \ell)} \quad \text{car } [X > k+\ell] \subset > \ell] \\ &= \frac{(1-p)^{k+\ell}}{(1-p)^{\ell}} \\ &= (1-p)^k.\end{aligned}$$

Ainsi : $\mathbb{P}_{[X>\ell]}(X > k+\ell) = \mathbb{P}(X > k)$.

Correction de l'exercice 9. Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On effectue une infinité de tirages avec remise.

1. Soit X_1 la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule blanche.
   (a) La variable X_1 donne le rang du premier succès lors d'une répétition d'une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes (tirages avec remise) dont le succès « obtenir une boule blanche » a probabilité
   $$\frac{a}{a+b}.$$
   Donc X_1 suit la loi $\mathcal{G}\left(\frac{a}{a+b}\right)$.
   (b) On en déduit :
   $$\mathbb{E}(X_1) = \frac{a+b}{a} \quad ; \quad \mathbb{V}(X_1) = \frac{\frac{b}{a+b}}{\left(\frac{a}{a+b}\right)^2} = \frac{b(a+b)}{a^2}.$$
2. Soit X_2 la variable aléatoire égale au rang de tirage de la deuxième boule blanche.
   (a) On a $X_2(\Omega) = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$. Soit $n \geq 2$. On note B_i l'événement « obtenir une blanche lors du i-ème tirage » et N_i l'événement « obtenir une noire lors du i-ème tirage ». On a alors :
   $$[X_2 = n] = \bigcup_{k=1}^{n-1} \left(B_n \cap B_k \cap \bigcap_{j=1, j\neq k}^{n-1} N_j \right)$$
   (l'indice k représente le tirage de la première blanche). Or, pour tout $k, j \in [\![1, n-1]\!]$ avec $j \neq k$, on a par indépendance des tirages :
   $$\mathbb{P}(B_n \cap B_k \cap \bigcap_{j=1, j\neq k}^{n-1} N_j) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2}.$$
   Donc, par σ-additivité :
   $$\mathbb{P}(X_2 = n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(B_n \cap B_k \cap \bigcap_{j=1, j\neq k}^{n-1} N_j) = (n-1) \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2}.$$

(b) La variable X_2 possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 2} n\mathbb{P}(X_2 = n)$ est absolument convergente. D'après la question précédente, il s'agit d'un multiple de la série géométrique dérivée d'ordre 2 de raison $0 < \frac{b}{a+b} < 1$. Elle est donc absolument convergente.
Par conséquent, X_2 possède une espérance et :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_2) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\mathbb{P}(X_2 = n) &= \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2} \\ &= \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 \frac{2}{\left(1-\frac{b}{a+b}\right)^3} \\ &= \frac{2(a+b)}{a}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10.

1. L'événement N est pair se réécrit

$$N \text{ est pair} = \cup_{k=0}^{+\infty}\{X = 2k\}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N \text{ est pair}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k) \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{1}{2}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{\lambda^\ell}{\ell!} + \sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{(-\lambda)^\ell}{\ell!}\right) \\ &= e^{-\lambda}\frac{1}{2}(e^{\lambda}+e^{-\lambda}) = \frac{1}{2}(1+e^{-2\lambda})\end{aligned}$$

et soit en procédant de même, soit en passant au complémentaire,

$$\mathbb{P}(N \text{ est impair}) = \frac{1}{2}(1-e^{-2\lambda}).$$

Donc on a :

$$\mathbb{P}(N \text{ est impair}) < \mathbb{P}(N \text{ est pair}).$$

2. Tout d'abord,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(N \text{ est pair}, N \geq 1) = \mathbb{P}(N \text{ est pair}, N \neq 0) \\ &\qquad = \mathbb{P}(N \text{ est pair}) - \mathbb{P}(N = 0) = \frac{1}{2}(1-e^{-2\lambda}) - e^{-\lambda} = \frac{1}{2}(1-e^{-\lambda})^2\end{aligned}$$

et donc

$$\mathbb{P}_{(N\geq 1)}(N \text{ est pair}) = \frac{\mathbb{P}(N \text{ est pair}, N \geq 1)}{\mathbb{P}(N \geq 1)} = e^{\lambda}.\frac{1}{2}(1-e^{-\lambda})^2$$

Ensuite, plus simplement

$$\mathbb{P}(N \text{ est impair}, N \geq 1) = \mathbb{P}(N \text{ est impair}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\lambda}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-\lambda})(1 + e^{-\lambda})$$

et donc

$$\mathbb{P}_{(N\geq 1)}(N \text{ est impair}) = \frac{\mathbb{P}(N \text{ est impair}, N \geq 1)}{\mathbb{P}(N \geq 1)} = e^{\lambda}.\frac{1}{2}(1 - e^{-\lambda})(1 + e^{-\lambda})$$

et finalement, sachant $N \geq 1$, la situation s'inverse

$$\mathbb{P}_{(N\geq 1)}(N \text{ est impair}) > \mathbb{P}_{(N\geq 1)}(N \text{ est pair}).$$

Correction de l'exercice 11. Dans chaque cas, justifier que Y possède une espérance et calculer $E(Y)$.

1. Par linéarité, Y possède une espérance et :

$$\mathbb{E}(Y) = n - \mathbb{E}(X) = n - np = n(1 - p).$$

2. D'après le théorème de transfert, Y possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} 2^n \mathbb{P}(X = n)$ converge absolument.
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$2^n \mathbb{P}(X = n) = 2^n \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \frac{(2\lambda)^n e^{-\lambda}}{n!}.$$

La série $\sum_{n\geq 0} 2^n \mathbb{P}(X = n)$ est donc une série exponentielle absolument convergente.
La variable aléatoire Y possède donc une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2\lambda)^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{\lambda}.$$

3. D'après le théorème de transfert, Y possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} 2^n \mathbb{P}(X = n)$ converge absolument.
Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2^n \mathbb{P}(X = n) = 2^n p(1 - p)^{n-1} = 2p(2 - 2p)^{n-1}.$$

La série $\sum_{n\geq 0} 2^n \mathbb{P}(X = n)$ est donc une série géométrique de raison $2 - 2p > 0$ qui converge absolument si et seulement si

$$2 - 2p < 1 \iff p > \frac{1}{2}.$$

Ainsi la variable aléatoire Y possède une espérance si et seulement si $\frac{1}{2} < p < 1$ et dans ce cas elle est donnée par :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2p(2 - 2p)^{n-1} = \frac{2p}{1 - (2 - 2p)} = \frac{2p}{2p - 1}.$$

4. D'après le théorème de transfert, Y possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)}\mathbb{P}(X=n)$ converge absolument.
   Or pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{1}{n+1}\mathbb{P}(X=n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{(n+1)!}.$$
   La série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1}\mathbb{P}(X=n)$ est donc une série exponentielle absolument convergente.
   La variable aléatoire Y possède donc une espérance donnée par :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{(n+1)!} &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{n+1}}{(n+1)!}\\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\\ &= \frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} - 1\right)\\ &= \frac{e^{-\lambda}(e^{\lambda}-1)}{\lambda}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 12. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Alors X possède une espérance et un moment d'ordre 2 donnés par :
$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda.$$
D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a donc :
$$\forall a > 0, \quad \mathbb{P}(|X-\lambda| \geq a) \leq \frac{\lambda}{a^2}.$$

Correction de l'exercice 13. 1. La fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{X}_n - p \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\overline{X}_n \geq p+\varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(n\theta\overline{X}_n \geq n\theta(p+\varepsilon)\right)\\ &= \mathbb{P}\left(e^{n\theta\overline{X}_n} \geq e^{n\theta(p+\varepsilon)}\right).\end{aligned}$$

2. La variable aléatoire $e^{n\theta\overline{X}_n}$ est positive et possède une espérance (car elle est à support fini) donc d'après l'inégalité de Markov :
$$\mathbb{P}\left(e^{n\theta\overline{X}_n} \geq e^{n\theta(p+\varepsilon)}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(e^{n\theta\overline{X}_n}\right)}{e^{n\theta(p+\varepsilon)}}.$$
   Or, on a :
$$e^{n\theta\overline{X}_n} = e^{\theta\sum_{i=1}^n X_i} = \prod_{i=1}^n e^{\theta X_i}.$$

D'après le lemme des coalitions, les variables $(e^{\theta X_i})_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendantes donc :

$$\mathbb{E}\left(e^{n\theta\overline{X}_n}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{\theta X_i}\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{\theta X_i}\right).$$

De plus, d'après le théorème de transfert on a :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \mathbb{E}\left(e^{\theta X_i}\right) = pe^{\theta} + q.$$

Finalement, on a donc :

$$\mathbb{E}\left(e^{n\theta\overline{X}_n}\right) = (pe^{\theta} + q)^n$$

puis

$$\mathbb{P}\left(e^{n\theta\overline{X}_n} \geq e^{n\theta(p+\varepsilon)}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(e^{n\theta\overline{X}_n}\right)}{e^{n\theta(p+\varepsilon)}} = \frac{(pe^{\theta}+q)^n}{e^{n\theta(p+\varepsilon)}} = e^{n\left(\ln(pe^{\theta}+q)-\theta(p+\varepsilon)\right)}.$$