Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DM 3 – À rendre le 13/01/2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats, étapes importantes, ...doivent être mis en valeurs.

Exercice 1

1. Soit $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

(a) Étudier la fonction $x \mapsto x + \sqrt{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$ (tableau de variations, limites).

(b) En déduire le domaine de définition de f.

(c) Étudier la fonction f.

(d) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un $\mathbb{R}$ et que sa bijection réciproque est $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

2. On considère l'équation différentielle (E) suivante : $y' = \sqrt{1+y^2}$.

(a) **Python**. Étant donné a, on s'intéresse à la solution de (E) vérifiant $y(0) = a \in \mathbb{R}$ (on admet qu'il en existe une unique).

Écrire une fonction python `Euler` qui prend en entrées un entier $n \in \mathbb{N}^*$, un réel $T > 0$ et une condition initiale $a \in \mathbb{R}$ et qui renvoie la liste des termes de la suite obtenue par la méthode d'Euler sur l'intervalle $[0, T]$:

$$y_0 = a \quad ; \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad y_{k+1} = y_k + \frac{T}{n}\sqrt{1+y_k^2}.$$

(b) En effectuant le changement de fonction $z = f(y)$, résoudre (E).

(c) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution y de (E) vérifiant $y(0) = a$.

Exercice 2

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = (x+1)e^{kx}.$$

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Dresser le tableau de variations de f_k en précisant les limites en $-\infty$ et $+\infty$.

On précisera les valeurs prises en -1 et en 0.

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_k(x) = k$ d'inconnue x, admet une unique solution sans $\mathbb{R}$.

On notera u_k cette solution.

3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 \leq u_k \leq \frac{\ln(k)}{k}.$$

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k+1)}{k}.$$

5. En déduire un équivalent de u_k quand k tend vers $+\infty$.

6. Déterminer la nature de $\sum\limits_{k\geq 1} u_k$.

Problème – L'entropie en probabilité

L'objet de cet exercice est d'introduire la fonction d'entropie qui mesure l'incertitude sur la valeur prise par une variable aléatoire donnée.
Soit $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad h(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

et soit X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On dit que X possède une **entropie** si la série $\sum\limits_{x\in X(\Omega)} h(\mathbb{P}(X=x))$ est absolument convergente. Dans ce cas l'**entropie** de X, notée $H(X)$ est égale à la somme de cette série :

$$H(X) = -\sum_{x\in X(\Omega)} h(\mathbb{P}(X=x)).$$

En particulier, lorsque X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de nombres réels, l'entropie de X existe toujours et vaut :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} h(p_i)$$

où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$.

Partie I - Préliminaires

1. **(a)** Démontrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$.
(b) La fonction h est-elle dérivable en 0 ?
(c) Déterminer les antécédentes de 0 par la fonction h.
(d) Dresser le tableau de variation de h et en déduire son tableau de signe.

2. Pour tout x dans $[0, 1]$, on pose $g(x) = -h(x) - h(1-x)$.
Dresser le tableau de variation de g.

3. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $-x\ln(x) \leq 1 - x$ avec égalité si et seulement si $x = 1$.

Partie II - Entropie des variables aléatoires discrètes finies

4. Dans cette question U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme discrète sur $[\![1,n]\!]$. Déterminer $H(U)$.

5. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Démontrer que $H(X) \leq \ln(2)$ avec égalité si et seulement si $p = \dfrac{1}{2}$. On pourra utiliser la question 2.

6. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes qui suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2 définies sur le même espace probabilisé. Soit Z la variable aléatoire telle que :

- $Z(\Omega) = \{0,1\}$;
- l'événement $[Z = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement « $X_1 + X_2$ est impair » est réalisé.

On définit le réel p par : $p = P(Z = 1)$.

(a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $X_1 + X_2$?

(b) Démontrer que $p = p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)$.

(c) Vérifier que $1 - 2p = (1-2p_1)(1-2p_2)$.

7. Soit $p \in]0,1[$ et $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables (mutuellement) indépendantes de même loi Bernoulli de paramètre p. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et on considère Z_n la variable aléatoire telle que :

- $Z_n(\Omega) = \{0,1\}$;
- l'événement $[Z_n = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement « S_n est impair » est réalisé.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de S_n ?

(b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 - 2\mathbb{P}(Z_n = 1) = (1-2p)^n$.

(c) Démontrer que $H(Z_n) \leq \ln(2)$. Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

8. Plus généralement, on considère X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on note $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et on suppose $p_k > 0$.

(a) Montrer que $H(X) \leq H(U)$ où U a été définie à la question 4.

(b) Vérifier qu'il y a égalité si et seulement si X suit une loi uniforme.

Partie III - Entropie des variables aléatoires discrètes infinies

9. Soit $p \in]0,1[$ et soit G suivant la loi géométrique de paramètre p.
Justifier que G possède une entropie et montrer :

$$H(G) = -\frac{1-p}{p}\ln(1-p) - \ln(p).$$

10. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(G)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $p_k = \mathbb{P}(G = k)$ et $q_k = \mathbb{P}(X = k)$ et on suppose $q_k > 0$.

(a) Rappeler la valeur de $\mathbb{E}(G)$.

(b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\ln(p_k) - \ln(q_k) \leq \frac{p_k - q_k}{q_k}.$$

On pourra démontrer que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$ *avec égalité si et seulement si* $x = 1$.

(c) Montrer que $\sum_{k \geq 1} (p_k - q_k) \ln(p_k)$ converge et que sa somme vaut 0.

(d) Montrer que pour tout $k \geq 1$ on a :

$$-q_k \ln(q_k) \leq -p_k \ln(p_k) + (p_k - q_k) \ln(p_k) + p_k - q_k.$$

(e) En déduire que X possède une entropie et que : $H(X) \leq H(G)$ avec égalité si et seulement si X suit la même loi que G.

Partie IV - Entropie et suites typiques

Dans cette partie, on considère une expérience aléatoire à $N \in \mathbb{N}^*$ issues numérotées $\{1, \ldots, N\}$ et pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, on note p_k la probabilité de l'issue k.
On appelle X la variable aléatoire à valeurs dans $\{1, \ldots, N\}$ et valant k si l'issue numéro k est réalisée.

On répète un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ de fois cette expérience de manière indépendante et on considère la suite des résultats obtenus.
L'univers Ω est donc l'ensemble des suites $(u_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ à valeurs dans $\{1, \ldots, N\}$.

Soit u un élément de Ω. Pour tout $k \in \{1, \ldots, N\}$ on note $e_k^n(u)$ le nombre d'apparition de l'issue k dans u lors des n répétitions et on appelle **fréquence d'apparition de l'issue** k **dans** u, notée $f_k^n(u)$ le réel :

$$\frac{e_k^n(u)}{n}.$$

Pour toute suite $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de $\{1, \ldots, N\}^{\mathbb{N}^*}$, on note u^n l'élément de Ω obtenu en tronquant u au rang n :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad u_i^n = u_i.$$

La suite u est dite **typique** si :

$$\forall k \in \{1, \ldots, N\}, \quad f_k^n(u^n) \underset{n \to +\infty}{\sim} p_k.$$

11. Soit $u \in \Omega$. Montrer que $\mathbb{P}(\{u\}) = e^{n \sum_{k=1}^N f_k^n(u) \ln(p_k)}$.

12. Soit u une suite typique. Montrer que : $\ln(\mathbb{P}(\{u^n\})) \underset{n \to +\infty}{\sim} -nH(X)$.