Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DM 3 – À rendre le 13/01/2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats, étapes importantes, ...doivent être mis en valeurs.

Exercice 1

1. Soit $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

(a) Notons g cette fonction.

La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc par composition $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\sqrt{1+x^2} > |x| \geq -x$$

donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) > 0.$$

Ainsi g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par opération sur les limites, il est clair que : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Pour la limite en $-\infty$ c'est plus délicat car on a une forme indéterminée $-\infty + \infty$. Soit $x < 0$.

$$\begin{aligned} x + \sqrt{1+x^2} = x + \sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} &= x - x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} \\ &= x(1 - \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}) \\ &\underset{x\to-\infty}{\sim} x \times \frac{-1}{2x^2} \\ &\xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \end{aligned}$$

(b) La fonction g est strictement croissante et de limite 0 en $-\infty$ donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + \sqrt{1+x^2} > 0.$$

On en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}$.

(c) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ et la fonction ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = g'(x)\frac{1}{g(x)} = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0.$$

En particulier f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et avec la question **1.(a)** on a :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to 0} \ln(y) = -\infty.$$

(d) D'après les questions précédentes, f est strictement croissante et continue donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f[= \mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{1+\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\right).$$

Or :

$$1+\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} = \frac{(e^x+e^{-x})^2}{4} > 0$$

donc :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) &= \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \sqrt{1+\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \\ &= \ln(e^x) \\ &= x. \end{aligned}$$

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{e^{f(x)} - e^{-f(x)}}{2} &= \frac{x+\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}}{2} \\ &= \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^2 - 1}{2(x+\sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{x^2+2x\sqrt{1+x^2}+1+x^2-1}{2(x+\sqrt{1+x^2})} \\ &= \frac{2x^2+2x\sqrt{1+x^2}}{2(x+\sqrt{1+x^2})} \\ &= x. \end{aligned}$$

Ainsi sa bijection réciproque est bien $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

2. On considère l'équation différentielle (E) suivante : $y' = \sqrt{1+y^2}$.

(a) **Python**. Étant donné a, on s'intéresse à la solution de (E) vérifiant $y(0) = a \in \mathbb{R}$ (on admet qu'il en existe une unique).

```
def Euler(n,T,a):
        Y = [a]
        for k in range(n):
                Y.append(Y[-1]+T/n*np.sqrt(1+Y[-1]**2)
        return Y
```

(b) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

$$\begin{aligned} y \quad \text{est solution de } (E) &\iff y' = \sqrt{1+y^2} \\ &\iff \frac{y'}{\sqrt{1+y^2}} = 1. \end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}} = f'(y)$ d'où :

$$\begin{aligned} y \quad \text{est solution de } (E) &\iff y'f'(y) = 1 \\ &\iff (f(y))' = 1 \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R}\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(y(t)) = t + C \\ &\iff \exists C \in \mathbb{R}\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \frac{e^{t+C} - e^{-(t+C)}}{2}. \end{aligned}$$

(c) Soit $a \in \mathbb{R}$et y une solution de (E). Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = \frac{e^{t+C} - e^{-(t+C)}}{2}.$$

Alors :

$$y(0) = a \iff \frac{e^{C} - e^{-C}}{2} = a \iff C = f(a).$$

Ainsi l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = a$ est :

$$t \mapsto \frac{e^{t+f(a)} - e^{-(t+f(a))}}{2}.$$

Exercice 2

Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = (x+1)e^{kx}.$$

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_k'(x) = e^{kx}(kx + k + 1).$$

On en déduit :

x	$-\infty$		$-1-\dfrac{1}{k}$		$+\infty$
Signe de $f_k'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f_k	0	$\searrow$	$-\dfrac{e^{-k-1}}{k}$	$\nearrow$	$+\infty$

De plus :

$$f_k(0) = 1 \quad \text{et} \quad f_k(-1) = 0.$$

Dresser le tableau de variations de f_k en précisant les limites en $-\infty$ et $+\infty$.
On précisera les valeurs prises en -1 et en 0.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après le tableau de variations, on sait que :

$$\forall x \geq -1 - \frac{1}{k}, \quad f_k(x) < 0.$$

Donc l'équation $f_k(x) = k$ n'a pas de solution sur $\left]-\infty, -1 - \dfrac{1}{k}\right[$.

D'autre part, sur $\left[-1 - \dfrac{1}{k}, +\infty\right[$, f_k est strictement croissante et continue donc, d'après le théorème de la bijection, f_k réalise une bijection de $\left[-1 - \dfrac{1}{k}, +\infty\right[$ sur $\left[-\dfrac{e^{-k-1}}{k}, +\infty\right[$.

Comme $k \in \left[-\dfrac{e^{-k-1}}{k}, +\infty\right[$, il existe alors une unique solution dans $\left[-1 - \dfrac{1}{k}, +\infty\right[$ à l'équation $f_k(x) = k$.

Finalement, l'équation $f_k(x) = k$ d'inconnue x, admet bien une unique solution sans $\mathbb{R}$.

On notera u_k cette solution.

3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f_k(0) = 1 \leq k \leq f_k\left(\frac{\ln(k)}{k}\right) = k\left(1 + \frac{\ln(k)}{k}\right).$$

Par croissante stricte de f_k sur $[0, +\infty[$, on en déduit donc :

$$0 \leq u_k \leq \frac{\ln(k)}{k}.$$

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On sait, par définition de u_k que :

$$(u_k + 1)e^{ku_k} = k.$$

En passant au logarithme on obtient :

$$\ln(u_k + 1) + ku_k = \ln(k)$$

c'est-à-dire

$$u_k = \frac{\ln(k)}{k} - \frac{\ln(u_k + 1)}{k}.$$

5. D'après la question **3** et comme $\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln(k)}{k} = 0$ (par croissance comparée), le théorème des gendarmes permet de voir que :

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = 0.$$

En utilisant la question précédente on a alors :

$$u_k = \frac{\ln(k)}{k}\left(1 - \frac{\ln(u_k+1)}{\ln(k)}\right)$$

avec $\lim_{k\to+\infty}\left(1 - \frac{\ln(u_k+1)}{\ln(k)}\right) = 1$.
Ainsi :

$$u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(k)}{k}.$$

6. La série $\sum_{k\geq 1} u_k$ est à termes positifs donc, d'après la question précédente et le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, on sait qu'elle est de même nature que $\sum_{k\geq 0} \frac{\ln(k)}{k}$.
Or, pour tout $k \geq 3$ on sait que :

$$\frac{\ln(k)}{k} \geq \frac{1}{k} \geq 0.$$

Donc par le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, comme la série harmonique divergence alors la série $\sum_{k\geq 0} \frac{\ln(k)}{k}$.

Finalement, la série $\sum_{k\geq 1} u_k$ est donc divergente.

Partie I - Préliminaires

1. **(a)** Par opération sur les fonctions continues, h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, par croissance comparée :

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0 = h(0).$$

Ainsi, h est aussi continue en 0.

(b) Étudions le taux d'accroissement de la fonction h en 0. Pour tout $x > 0$ on a :

$$\frac{h(x)-h(0)}{x} = \ln(x).$$

Ainsi, quand x tend vers 0 le taux d'accroissement n'a pas de limite finie. La fonction h n'est donc pas dérivable en 0.

(c) Il est clair que 0 est un antécédent de 0 par h. Soit $x > 0$, on a

$$h(x) = 0 \iff x\ln(x) = 0 \iff \ln(x) = 0 \text{ (car } x \neq 0) \iff x = 1.$$

Les antécédentes de 0 par la fonction h sont donc 0 et 1.

(d) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par opération et pour tout $x > 0$:

$$h'(x) = \ln(x) + 1.$$

Ainsi :

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
Signe de $h'(x)$	$\|$	$-$	0		$+$		
Variations de h	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signe de $h(x)$			$-$		0		$+$

2. Par opération sur les fonctions dérivables, g est dérivable sur $]0,1[$ et on a pour tout $x \in]0,1[$ on a :

$$g'(x) = -h'(x) + h'(1-x) = -\ln(x) + \ln(1-x) = \ln\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

Ainsi :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
Signe de $g'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$
Variations de g	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

3. Soit $u : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x - x\ln(x) - 1$, dérivable. On a :

$$u'(x) = -\ln(x).$$

x	0		1		$+\infty$
Signe de $u'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$
Variations de u	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

En particulier, $u(x) \leq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 1$. De manière équivalent pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $-x\ln(x) \leq 1 - x$ avec égalité si et seulement si $x = 1$.

Partie II - Entropie des variables aléatoires discrètes finies

4. Remarquons déjà que U est à support fini donc l'entropie est bien définie (la somme qui apparaît est finie). On obtient

$$H(U) = -\sum_{i=1}^{n} h\left(\frac{1}{n}\right) = -nh\left(\frac{1}{n}\right) = \ln(n)$$

5. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On a :

$$H(X) = -h(p) - h(1-p) = g(p) \leq g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

avec égalité si et seulement si $p = \dfrac{1}{2}$ d'après la question 2.

6. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes qui suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2 définies sur le même espace probabilisé. Soit Z la variable aléatoire telle que :

- $Z(\Omega) = \{0,1\}$;
- l'événement $[Z = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement « $X_1 + X_2$ est impair » est réalisé.

On définit le réel p par : $p = \mathbb{P}(Z = 1)$.

(a) Les valeurs prises par la variable aléatoire $X_1 + X_2$ sont 0, 1 et 2.

(b) On a

$$\begin{aligned} p = \mathbb{P}(X_1 + X_2 = 1) &= \mathbb{P}\left([X_1 = 0, X_2 = 1] \cup [X_1 = 1, X_2 = 0]\right) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0). \end{aligned}$$

Or X_1 et X_2 sont indépendantes donc :

$$\begin{aligned} p &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 0) \\ &= p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1). \end{aligned}$$

(c) Un simple calcul donne

$$1 - 2p = 1 - 2p_1(1-p_2) - 2p_2(1-p_1) = 1 - 2p_1 - 2p_2 + 4p_1p_2 = (1-2p_1)(1-2p_2).$$

7. Soit $p \in]0,1[$ et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables (mutuellement) indépendantes de même loi Bernoulli de paramètre p. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et on considère Z_n la variable aléatoire telle que :

- $Z_n(\Omega) = \{0,1\}$;
- l'événement $[Z_n = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement « S_n est impair » est réalisé.

(a) La variable S_n est une somme de n variables de Bernoulli de même paramètre p et mutuellement indépendantes. Donc S_n suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $1 - 2\mathbb{P}(Z_n = 1) = (1-2p)^n$ ».

— *Initialisation* : la propriété est triviale au rang 1.

— *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_{n+1} = 1) &= \mathbb{P}(S_{n+1} \text{ impair}) \\ &= \mathbb{P}(S_n \text{ impair}, X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(S_n \text{ pair}, X_{n+1} = 1) \\ &= \mathbb{P}(S_n \text{ impair})\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}(S_n \text{ pair})\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) \quad \text{indépendance} \\ &= (1-p)\mathbb{P}(Z_n = 1) + p(1 - \mathbb{P}(Z_n = 1)). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}1-2\mathbb{P}(Z_{n+1}=1) &= 1-2(1-p)\mathbb{P}(Z_n=1)-2p(1-\mathbb{P}(Z_n=1))\\ &= (1-2p)(1-2\mathbb{P}(Z_n=1))\\ &= (1-2p)(1-2p)^n \quad \text{HR}\\ &= (1-2p)^{n+1}.\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— *Conclusion :* d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1-2\mathbb{P}(Z_n=1)=(1-2p)^n$.

(c) Comme $Z_n(\Omega)=\{0,1\}$, Z_n suit une loi de Bernoulli. D'après la question 5, on a donc $H(Z_n) \leq \ln(2)$ avec égalité si et seulement si

$$\mathbb{P}(Z_n=1)=\frac{1}{2}$$

c'est-à-dire

$$1-2\mathbb{P}(Z_n=1)=(1-2p)^n=0 \text{ ou encore } p=\frac{1}{2}.$$

8. Plus généralement, on considère X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on note $p_k=\mathbb{P}(X=k)$.

(a) Remarquons déjà que X est à support fini donc l'entropie est bien définie (la somme qui apparaît est finie). On a alors :

$$H(X)=-\sum_{i=1}^{n} p_k \ln(p_k).$$

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a $(-np_k)\ln(np_k) \leq 1-np_k$ c'est-à-dire :

$$-p_k\ln(n)-p_k\ln(p_k)=-p_k\ln(np_k) \leq \frac{1}{n}-p_k.$$

En sommant on obtient :

$$-\sum_{k=1}^{n} p_k\ln(n)-\sum_{k=1}^{n} p_k\ln(p_k) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}-\sum_{k=1}^{n} p_k$$

c'est-à-dire :

$$-\ln(n)+H(X) \leq 1-1=0.$$

Ainsi on a bien :

$$H(X) \leq \ln(n)=H(U).$$

(b) Il y a égalité si et seulement si pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a

$$(-np_k)\ln(np_k)=1-np_k$$

donc, compte tenu du cas d'égalité de la question 3, si et seulement si pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a

$$np_k=1.$$

Ainsi il y a égalité si et seulement si pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a $p_k=\dfrac{1}{n}$ si et seulement si X suit une loi uniforme.

Partie III - Entropie des variables aléatoires discrètes infinies

9. Soit $p \in]0,1[$ et soit G suivant la loi géométrique de paramètre p. On rappelle que :

$$G(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \ \mathbb{P}(G = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

Pour commencer, il s'agit d'étudier la nature de la série $\sum_{k\geq 1} -p(1-p)^{k-1} \ln\left(p(1-p)^{k-1}\right)$.

Pour tout $k \geq 1$ on peut écrire :

$$\begin{aligned}
-p(1-p)^{k-1} \ln\left(p(1-p)^{k-1}\right) &= -p\ln(p)(1-p)^{k-1} - p\ln(1-p)(k-1)(1-p)^{k-1} \\
&= p(\ln(1-p) - \ln(p))(1-p)^{k-1} - p\ln(1-p)k(1-p)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\sum_{k\geq 1} -p(1-p)^{k-1} \ln\left(p(1-p)^{k-1}\right)$ est une combinaison linéaire de séries géométriques convergentes donc est elle-même convergente. De plus :

$$\begin{aligned}
H(G) &= \sum_{k=1}^{+\infty} -p(1-p)^{k-1} \ln\left(p(1-p)^{k-1}\right) \\
&= p(\ln(1-p) - \ln(p)) \sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} - p\ln(1-p) \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} \\
&= p(\ln(1-p) - \ln(p)) \frac{1}{p} - p\ln(1-p)\frac{1}{p^2} \\
&= \ln(1-p) - \ln(p) - \frac{\ln(1-p)}{p} \\
&= -\frac{1-p}{p} \ln(1-p) - \ln(p)
\end{aligned}$$

10. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(G)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $p_k = \mathbb{P}(G = k)$ et $q_k = \mathbb{P}(X = k)$ et on suppose $q_k > 0$.

(a) D'après le cours $\mathbb{E}(G) = \dfrac{1}{p}$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\ln(p_k) - \ln(q_k) = \ln\left(\frac{p_k}{q_k}\right) \leq \frac{p_k}{q_k} - 1 = \frac{p_k - q_k}{q_k}.$$

(c) Pour tout $k \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}
(p_k - q_k)\ln(p_k) &= p_k \ln(p_k) - q_k \ln(p_k) \\
&= p_k \ln(p_k) - q_k \ln(p) - q_k(k-1)\ln(1-p) \\
&= p_k \ln(p_k) - q_k(\ln(p) - \ln(1-p)) - kq_k \ln(1-p).
\end{aligned}$$

La série $\sum_{k\geq 1} p_k \ln(p_k)$ converge et sa somme vaut $-H(G)$, la série $\sum_{k\geq 1} q_k(\ln(p) - \ln(1-p))$ converge et sa somme vaut $\ln(p) - \ln(1-p)$, enfin, la série $\sum_{k\geq 1} kq_k \ln(1-p)$

converge vers $\mathbb{E}(X)\ln(1-p)$. Par conséquent, la série $\sum_{k\geq 1}(p_k - q_k)\ln(p_k)$ converge et que sa somme vaut :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}(p_k - q_k)\ln(p_k) &= -H(G) - (\ln(p) - \ln(1-p)) - \frac{1}{p}\ln(1-p)\\ &= 0.\end{aligned}$$

(d) Soit $k \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned}-q_k\ln(q_k) &= q_k\ln(p_k) - q_k\ln(p_k) - q_k\ln(q_k)\\ &= q_k(\ln(p_k) - \ln(q_k)) - q_k\ln(p_k)\\ &\leq q_k\frac{p_k - q_k}{q_k} - q_k\ln(p_k) \quad \text{d'après 10.b}\\ &\leq p_k - q_k - q_k\ln(p_k)\\ &= p_k - q_k - q_k\ln(p_k) + p_k\ln(p_k) - p_k\ln(p_k)\\ &= -p_k\ln(p_k) + (p_k - q_k)\ln(p_k) + p_k - q_k.\end{aligned}$$

(e) Le membre de droite de l'inégalité précédente est le terme général d'une série convergente. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs (se sont bien des séries à termes positifs d'après l'étude du signe de h en 1.d), on en déduit que la série converge (absolument car à termes positifs). Donc X possède une espérance.

Par ailleurs, en sommant membre à membre les inégalités ci-dessus :

$$\begin{aligned}H(X) &\leq H(G) + \sum_{k=1}^{+\infty}(p_k - q_k)\ln(p_k) + \sum_{k=1}^{+\infty}(p_k - q_k)\\ &\leq H(G) + 0 + \sum_{k=1}^{+\infty}p_k - \sum_{k=1}^{+\infty}q_k \quad \text{d'après la question précédente}\\ &\leq H(G) + 0 + 1 - 1\\ &\leq H(G).\end{aligned}$$

Il y a égalité si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ il y a égalité dans l'inégalité de la question 10.b si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{p_k}{q_k} = 1$ c'est-à-dire si et seulement si X suit la même loi que G.

Partie IV - Entropie et suites typiques

La suite u est dite **typique** si :

$$\forall k \in \{1, \ldots, N\}, \quad f_k(u^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} p_k.$$

11. Soit $u \in \Omega$. L'élément u est donc une suite finie $(u_1, \ldots, u_n) \in \{1, \ldots, N\}^n$ d'issues obtenues en répétant n fois l'expérience de manière indépendante. Par indépendance, on a donc :

$$\mathbb{P}(\{u\}) = \mathbb{P}(\{u_1\}) \times \cdots \times \mathbb{P}(\{u_n\}).$$

Or, pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, le nombre k apparaît $e_k^n(u)$ fois dans u et $\mathbb{P}(\{u_1\}) = p_k$). Cela signifie que dans le produit ci-dessus, p_1 apparaît $e_1^n(u)$ fois, p_2 apparaît $e_2^n(u)$ fois *etc* . D'où :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{u\}) = \mathbb{P}(\{u_1\}) \times \cdots \times \mathbb{P}(\{u_n\}) &= \prod_{k=1}^{N} p_k^{e_k^n(u)} \\
&= \prod_{k=1}^{N} e^{e_k^n(u)\ln(p_k)} \\
&= e^{\sum_{k=1}^{N} e_k^n(u)\ln(p_k)}
\end{aligned}$$

et finalement, comme $e_k^n(u) = nf_k^n(u)$, on a bien :

$$\mathbb{P}(\{u\}) = e^{n\sum_{k=1}^{N} f_k^n(u)\ln(p_k)}.$$

12. Soit u une suite typique. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(\{u^n\}) = e^{n\sum_{k=1}^{N} f_k^n(u^n)\ln(p_k)}.$$

Attention, ici l'énoncé comporte une erreur !
On a puisque la suite est typique :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} f_k^n(u^n)\ln(p_k) = -H(X)$$

donc

$$n\sum_{k=1}^{N} f_k^n(u^n)\ln(p_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nH(X)$$

c'est-à-dire :

$$\ln(\mathbb{P}(\{u^n\}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nH(X)$$

mais on ne peut pas composer par l'exponentielle dans les équivalents et on ne peut donc pas conclure que $\mathbb{P}(\{u^n\}) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-nH(X)}$!