Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DS5- 3H

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Questions de cours

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. La variable e^X possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
2. Une urne contient n boules ($n \geq 5$) : 2 boules blanches, 1 boule verte, 2 boules rouges ; les autres étant noires. On suppose les boules indiscernables au toucher. On tire avec remise dans l'urne jusqu'à obtenir une boule verte ou une boule blanche et on note X le nombre tirages nécessaires.
   Trouver la loi de X et, si elles existent son espérance et sa variance.

Exercice

On rappelle que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et que la famille

$$\mathcal{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle **trace** de M le réel noté $\mathrm{Tr}(M)$ défini par :

$$\mathrm{Tr}(M) = a + d.$$

Soit J une matrice non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit alors l'application f sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)J.$$

1. **(a)** Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ M &\longmapsto \mathrm{Tr}(M) \end{aligned}$$

est linéaire.

(b) Déterminer une base de son noyau et vérifier : $\dim(\ker(\mathrm{Tr})) = 3$.

2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Montrer que

$$E_1 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid f(M) = M\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer une base $\mathcal{B}$ de E_1.

4. Calculer $f(J)$.

5. On considère dans cette question le cas où $\mathrm{Tr(J)} \neq 0$.

(a) Montrer que la famille formée des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ et de J est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{Tr}(J)$ pour que f soit bijectif.

(c) Déterminer la matrice de f dans la base de la question 5a.

6. On considère maintenant le cas où $\mathrm{Tr(J)} = 0$. Soit $M \in \ker(f)$.

(a) Montrer que $\mathrm{Tr}(M) = 0$.

(b) En déduire que M est la matrice nulle.

(c) Conclure que f est bijective.

7. Dans cette question **uniquement**, on considère le cas où $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer la matrice, notée A, de f dans la base $\mathcal{B}_c$.

(b) Vérifier : $(A - I_4)^2 = 0_4$.

(c) Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Problème. Modèle probabiliste de Galton-Watson

L'objectif de ce problème est d'étudier le modèle probabiliste de Galton-Watson pour la modélisation d'évolution de population.
Il est composé de deux parties ; la deuxième est dédiée à l'étude algorithmique du modèle.
Les candidats peuvent admettre le résultat d'une question ou d'une sous-question pour passer aux questions suivantes, à condition de le mentionner explicitement.
Une annexe dans laquelle certaines commandes Python sont rappelées est jointe à la fin du sujet.
Pour les questions d'informatique, on considérera que les importations de modules nécessaires ont été préalablement faites.

Partie 1. Le Modèle de Galton-Watson, exemples.

Le modèle de Galton-Watson est modèle de croissance probabiliste pour une espèce. On considère une population dont on va décrire l'évolution génération par génération. On appelle Z_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'individus à la génération n et on considère que :

- Les générations ne se superposent pas,
- Chaque individu a un nombre aléatoire de descendants : le nombre de descendants d'un individu est une variable aléatoire. Les variables aléatoires pour chacun sont indépendantes et de même loi.

On s'intéresse aux conditions sous lesquelles on a extinction ou survie de l'espèce. On dit que la lignée est éteinte à la génération n si $Z_n = 0$ et on souhaite étudier la suite de terme général $P(Z_n = 0)$.

Formellement, le modèle est donné par :

$$Z_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$$

où les variables aléatoires $(X_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et sont **indépendantes et de même loi**. La variable $X_{n,i}$ est le nombre de descendants de l'individu numéro i de la génération n. On notera Y une autre variable aléatoire qui suit la même loi que les variables $X_{n,i}$.

Par exemple, si $Z_n = 12$ (la n-ième génération compte 12 individus) alors

$$Z_{n+1} = X_{n,1} + \cdots + X_{n,12} \;:$$

Z_{n+1} est la somme du nombre de descendants de chacun des 12 individus de la génération n.

On remarquera que comme $Z_0 = 1$, $Z_1 = X_{0,1}$, qui est le nombre de descendants de l'unique individu de génération 0. Ainsi Z_1 et Y suivant la même loi.

1. Que se passe-t-il si toutes les variables $X_{n,i}$ sont constantes égales à $q \in \mathbb{N}$?
2. **Dans cette question**, on suppose que le nombre de descendants de chaque individu suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = 0$ ou $Z_n = 1$ et que :

$$P(Z_n = 1) = p^n.$$

(b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} P(Z_n = 0)$.

3. On définit la suite (u_n) par $u_n = P(Z_n = 0)$. Justifier que (u_n) est croissante puis qu'elle converge.

Dans la suite du sujet, on appelle la limite de (u_n) **la probabilité d'extinction de la lignée**.

4. Étude complète dans un cas simple. Dans cette question uniquement, la loi de reproduction est la suivante : chaque individu a une probabilité $p \in]0, 1]$ de donner deux descendants, par exemple en se divisant, et $1-p$ de disparaître sans descendant.

(a) Donner l'ensemble des valeurs prises par Z_1 ainsi que sa loi. Calculer l'espérance $E(Z_1)$ et la variance $V(Z_1)$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$P(Z_{n+1} = 0) = (1-p)P_{[Z_1=0]}(Z_{n+1} = 0) + pP_{[Z_1=2]}(Z_{n+1} = 0).$$

(c) Justifier, avec une phrase, que $P_{[Z_1=2]}(Z_{n+1} = 0) = u_n^2$ puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = (1-p) + pu_n^2.$$

(d) En déduire que les deux limites possibles de (u_n) sont 1 et $\dfrac{1-p}{p}$.

(e) Montrer que si $p \leq \dfrac{1}{2}$, la probabilité d'extinction vaut 1.

(f) Si $p > 1/2$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq \frac{1-p}{p} < 1.$$

En déduire la probabilité d'extinction.

(g) Tracer la probabilité d'extinction en fonction de $E(Z_1)$. Commenter le tracé obtenu.

5. Dans cette question uniquement, on suppose que la loi de reproduction est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Y = k) = p^k(1-p).$$

pour une certaine valeur $p \in]0, 1[$ fixée.

(a) Justifier avec une phrase que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_{[Z_1=k]}(Z_{n+1} = 0) = u_n^k$. En utilisant un système complet d'événements associé à Z_1, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1-p}{1-pu_n}.$$

(b) On admet que (u_n) converge vers la plus petite des solutions de l'équation suivante dont l'inconnue est ℓ :

$$\ell = \frac{1-p}{1-p\ell}.$$

Déterminer la probabilité d'extinction en fonction de p.

(c) Reconnaitre la loi de $Y+1$. En déduire que les propositions suivantes sont équivalentes :

i. la probabilité d'extinction vaut 1.

ii. $E(Y) \leq 1$.

Commenter.

Partie 2. Modélisation informatique.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'implémentation informatique du processus de Galton-Watson. L'objectif est de faire des conjectures sur le comportement de la population dans le cas où la loi de reproduction est plus complexe : **on considèrera dans cette partie que les variables aléatoires $X_{n,i}$ suivent la loi de Poisson de paramètre** $\lambda > 0$.
On rappelle que la commande `rd.poisson(x)` simule une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre `x`.
La fonction suivant simule l'évolution d'une population et stocke le nombre d'individus à chaque génération dans une liste :

```
def galton_watson(lambda_,n):
    population = np.zeros(n+1)
    population[0] = 1
    Z = 1
    for i in range(1,n+1):
        descendants = 0
        for j in range(Z):
            descendants += rd.poisson(lambda_)
        population[i] = descendants
        Z = descendants
        if descendants == 0:
            return population
    return population
```

6. **(a)** À quoi correspondent les deux arguments de la fonction `galton_watson` ?

(b) À quoi servent les lignes suivantes ?

```
        if descendants == 0:
            return population
```

```
    population = np.zeros(n+1)
```

```
    descendants = 0
    for j in range(Z):
        descendants += rd.poisson(lambda_)
```

7. On souhaite réaliser :

— des simulations pour différentes valeurs de λ ,

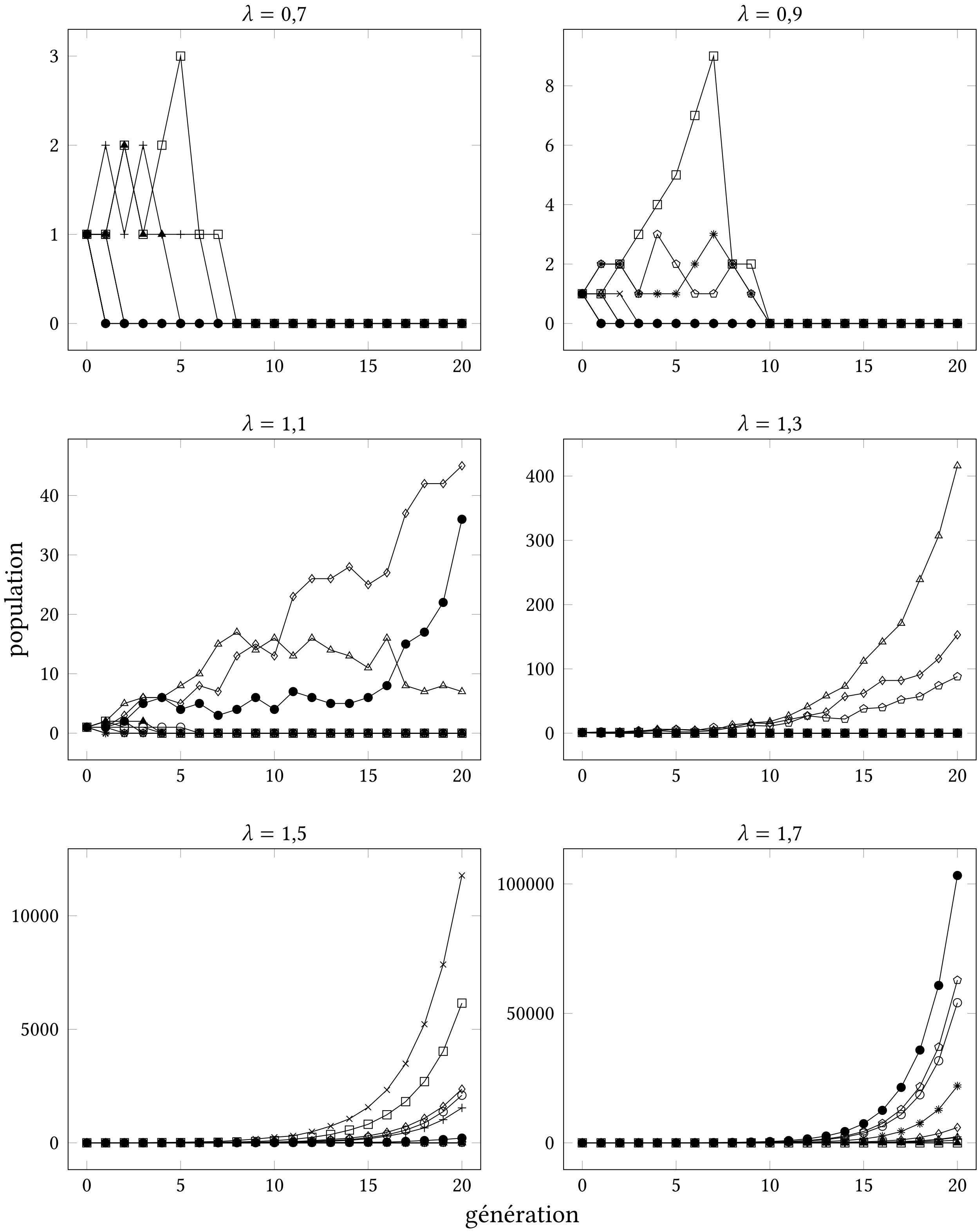
— pour chacun des choix, plusieurs simulations.

(a) Compléter le programme suivant pour qu'il réalise 10 simulations pour $\lambda = 0.7$ et 20 générations et les trace sur un même graphique.

```
lambda_ = 0.7
for k in #LIGNE A COMPLETER
        plt.plot(# LIGNE A COMPLETER )
plt.show()
```

(b) Les simulations donnent les résultats suivants (voir page suivante) pour λ variant entre 0.7 et 1.7 avec un pas de 0.2.

Quelles conjectures peut-on faire quant à la probabilité d'extinction de l'espèce ?



Les valeurs de la population sont déterminées pour des nombres *entiers* de générations. Des lignes ont cependant été tracées *entre* les valeurs de la population pour les générations successives, afin de faciliter la visualisation de l'évolution d'une population au cours des générations.

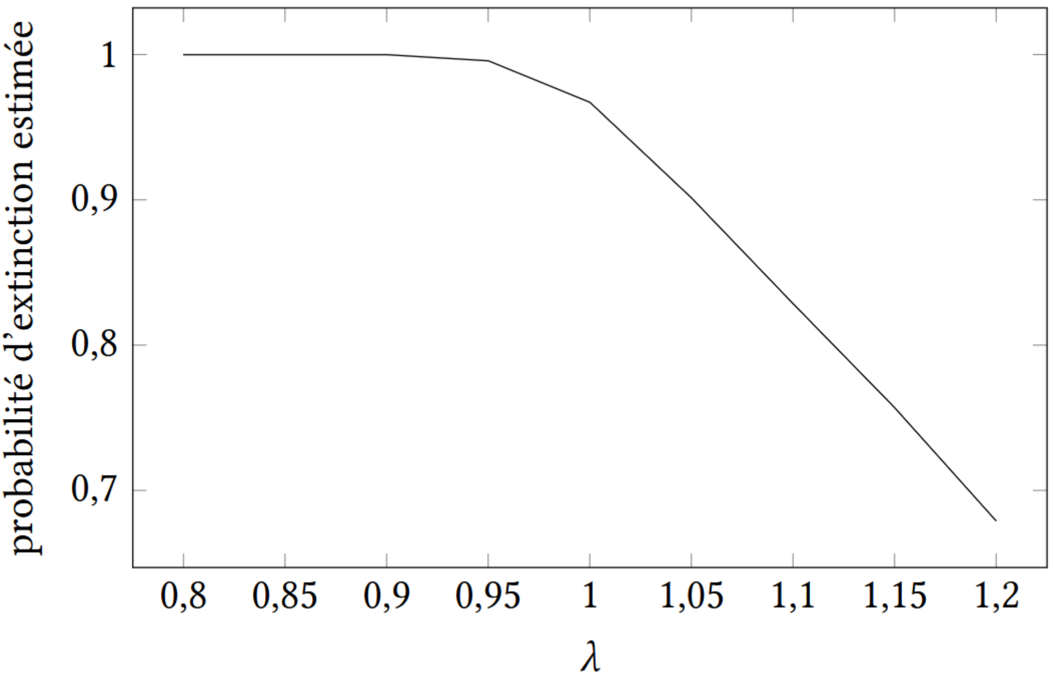
8. Dans cette question, on s'intéresse à la probabilité d'extinction.

(a) Comment modifier la fonction `galton_watson` pour qu'elle renvoie 1 si la lignée est éteinte et 0 si la lignée n'est pas éteinte ?

Pour la suite on appelle la fonction ainsi modifiée : `galton_watson_2`.

(b) Écrire une fonction extinction, qui prend entrée un paramètre `lambda_` et qui, à partir de 5000 simulations de Galton-Watson, renvoie une approximation de la probabilité d'extinction. (On s'arrêtera à 60 générations).

La simulation pour différentes valeurs de λ donne le graphique suivant.
(On a pris λ entre 0.8 et 1.2 avec un pas de 0.05.)



9. On note p_λ la probabilité d'extinction.

(a) Quelles conjectures peut-on faire sur p_λ ?

(b) Après n simulations, on note S_n le nombre d'entre elles qui ont mené à une extinction.

Après avoir justifié que S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_\lambda)$, montrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p_\lambda(1-p_\lambda)}{n\varepsilon^2}.$$

Montrer ensuite que :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver $\varepsilon > 0$ (dépendant de n) tel que :

$$P\left(\frac{S_n}{n} - \varepsilon \leq p_\lambda \leq \frac{S_n}{n} + \varepsilon\right) \geq 0.95.$$

(d) Pour $n = 5000$, déterminer graphiquement l'encadrement de p_λ obtenu lorsque $\lambda = 1.05$; $\lambda = 1.1$ et $\lambda = 1.15$

Annexe Python

Dans le module `matplotlib.pyplot` importé sous l'alias `plt` :
`plt.plot(X,Y)` prend en entrée deux vecteurs ou deux listes de même taille, et réalise le tracé des points d'abscisses prises dans X et d'ordonnées prises dans Y. Si on donne un seul argument à `plt.plot`, cela trace juste la suite des termes de X.
On utilise `plt.show()` pour afficher le tracé.

Dans le module `numpy` importé sous l'alias `np` :
`np.zeros(n)` crée une matrice unidimensionnelle de n coefficients tous nuls.

Dans le module `numpy.random` importé sous l'alias `rd` :
`rd.poisson(x)` simule une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre `x`.

FIN DU SUJET