Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DS5-

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

Questions de cours

1. D'après le théorème de transfert, e^X possède une espérance si et seulement si $\sum_{k\geq 0} e^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ converge absolument.

Il s'agit d'une série à termes positifs, la convergence et la convergence absolue reviennent au même. On reconnait par ailleurs, à un facteur $e^{-\lambda}$ près, une séries exponentielle de paramètre $e\lambda$. En particulier, cette série converge. Ainsi e^X possède une espérance et :

$$\mathbb{E}(e^X) = e^{\lambda} \sum_{k=0} \frac{(z\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{e\lambda}.$$

2. Une urne contient n boules ($n \geq 5$) : 2 boules blanches, 1 boule verte, 2 boules rouges ; les autres étant noires. On suppose les boules indiscernables au toucher.

On considère l'épreuve de Bernoulli consistant à tirer une boule dans l'urne et dont le succès est « avoir une boule verte ou une boule blanche ». La probabilité de succès est donc $\frac{3}{n}$.

La variable aléatoire X donne le rang du premier succès lorsqu'on répète successivement et de manière indépendante (il y a remise) l'épreuve ci-dessus.

Donc X suit la loi $\mathcal{G}\left(\frac{3}{n}\right)$.

Exercice

Soit J une matrice non nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit alors l'application f sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)J.$$

1. **(a)** Soit $(M,N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors en notant $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(M+\lambda N) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' \\ c+\lambda c' & d+\lambda d' \end{pmatrix}\right) &= a+\lambda a' + d + \lambda d' \\ &= a+b+\lambda(a'+d') \\ &= \mathrm{Tr}(M) + \lambda \mathrm{Tr}(N). \end{aligned}$$

Ainsi l'application Tr est linéaire.

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice. Alors :

$$\begin{aligned} M \in \ker(\mathrm{Tr}) &\Longleftrightarrow a+d=0 \\ &\Longleftrightarrow a=-d \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\ker(\mathrm{Tr})$.

Soit $(d,b,c) \in \mathbb{R}^3$ alors :

$$\begin{aligned} d\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -d & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow d=b=c=0. \end{aligned}$$

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est aussi libre ;

C'est donc une base du noyau et on a bien $\dim(\ker(\mathrm{Tr})) = 3$.

2. Soit $(M,N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(M+\lambda N) &= M+\lambda N + \mathrm{Tr}(M+\lambda N)J \\ &= M+\lambda N + (\mathrm{Tr}(M)+\lambda\mathrm{Tr}(N))J \quad \text{d'après 1} \\ &= M+\mathrm{Tr}(M)J + \lambda(N+\mathrm{Tr}(N)J) \\ &= f(M)+\lambda f(N). \end{aligned}$$

Ainsi f est une application linéaire définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. C'est donc un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} M \in E_1 \Longleftrightarrow f(M)=M &\Longleftrightarrow M+\mathrm{Tr}(M)J = M \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Tr}(M)J = 0_4 \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Tr}(M) = 0 \quad \text{car } J \neq 0_4 \\ &\Longleftrightarrow M \in \ker(\mathrm{Tr}). \end{aligned}$$

Ainsi $E_1 = \ker(\mathrm{Tr})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

De plus, la famille $\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ en est une base d'après **1.(b)**.

Remarque : ici le sujet comporte une imprécision car il note $\mathcal{B}$ la base ci-dessus alors que la lettre $\mathcal{B}$ est déjà utilisée pour la base canonique.

4. On a : $f(J) = (1 + \text{Tr}(J))J$.

5. On considère dans cette question le cas où $\text{Tr(J)} \neq 0$.

(a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$).

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \lambda_4 J = 0_2\\
&\Longrightarrow \lambda_4 J = -\lambda_1 \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \lambda_2 \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} - \lambda_3 \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\
&\Longrightarrow \lambda_4 \text{Tr}(J) = -\lambda_1 \text{Tr}\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) - \lambda_2 \text{Tr}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) - \lambda_3 \text{Tr}\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = 0\\
&\Longrightarrow \lambda_4 = 0 \quad \text{car } \text{Tr}(J) \neq 0.
\end{aligned}$$

Puis, comme la famille $\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ est libre on obtient :

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \lambda_4 J = 0_2\\
&\Longrightarrow \lambda_4 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = 0_2\\
&\Longrightarrow \lambda_4 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi la famille $\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, J\right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus elle contient 4 éléments et la dimension de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est 4. Donc c'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Remarque : le double usage de la lettre $\mathcal{B}$ a induit certains d'entre vous en erreur, la notation en a tenu compte.

(b) on a :

$$f\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad ; \quad f\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad ; \quad f(J) = (1 + \text{Tr}(J))J.$$

Donc l'image de la base de la question précédente par f est la famille

$$\left(\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, (1 + \text{Tr}(J))J\right).$$

Cette famille est une base si et seulement si $\text{Tr}(J) \neq -1$. En effet, si $\text{Tr}(J) = -1$ le dernier vecteur est le vecteur nul donc la famille est liée ; si $\text{Tr}(J) \neq -1$ il s'agit de la famille obtenue à partir de la base précédente en multipliant le dernier vecteur par le scalaire non nul $1 + \text{Tr}(J)$.

On en déduit donc que :

— si $\mathrm{Tr}(J) = -1$, f n'est pas bijective (on a trouvé une base dont l'image n'est pas une base) ;
— si si $\mathrm{Tr}(J) \neq -1$, f est bijective (on a trouvé une base dont l'image est une base).

Donc f est bijective si et seulement si $\mathrm{Tr}(J) \neq -1$.

(c) D'après ce qui précède, dans la base $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, J\right)$:

- $f\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ a pour coordonnées $(1, 0, 0, 0)$;
- $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ a pour coordonnées $(0, 1, 0, 0)$;
- $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ a pour coordonnées $(0, 0, 1, 0)$;
- $f(J)$ a pour coordonnées $(0, 0, 0, 1 + \mathrm{Tr}(J))$.

La matrice de f dans la base $\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, J\right)$ est donc :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + \mathrm{Tr}(J) \end{pmatrix}.$$

6. On considère désormais le cas où $\mathrm{Tr}(J) = 0$. Soit $M \in \ker(f)$.

(a) Par définition du noyau on a :

$$f(M) = M + \mathrm{Tr}(M)J = 0_2 \quad \text{c'est-à-dire} \quad M = -\mathrm{Tr}(M)J.$$

En appliquant la fonction trace qui est linéaire on déduit de cette égalité :

$$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(-\mathrm{Tr}(M)J) = -\mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(J) = 0.$$

(b) Donc $M = -\mathrm{Tr}(M)J$ et $\mathrm{Tr}(M) = 0$. Par conséquent M est la matrice nulle.

(c) La question précédente montre que $\ker(f) = \{0_2\}$ c'est-à-dire que f est injective.

Or f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie donc d'après une conséquence du théorème du rang, cela entraîne qu'il est bijectif.

7. Dans cette question **uniquement**, on considère le cas où $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) On a :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) On a bien :

$$(A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_4.$$

(c) On sait que :

$$A^2 - 2A + I_4 = (A - I_4)^2 = 0_4$$

donc

$$A(2I_4 - A) = I_4.$$

Ainsi A est inversible et $A^{-1} = 2I_4 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Problème. Modèle probabiliste de Galton-Watson

L'objectif de ce problème est d'étudier le modèle probabiliste de Galton-Watson pour la modélisation d'évolution de population.
Il est composé de deux parties ; la deuxième est dédiée à l'étude algorithmique du modèle.
Les candidats peuvent admettre le résultat d'une question ou d'une sous-question pour passer aux questions suivantes, à condition de le mentionner explicitement.
Une annexe dans laquelle certaines commandes Python sont rappelées est jointe à la fin du sujet.
Pour les questions d'informatique, on considérera que les importations de modules nécessaires ont été préalablement faites.

Partie 1. Le Modèle de Galton-Watson, exemples.

Le modèle de Galton-Watson est modèle de croissance probabiliste pour une espèce. On considère une population dont on va décrire l'évolution génération par génération. On appelle Z_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'individus à la génération n et on considère que :

- Les générations ne se superposent pas,
- Chaque individu a un nombre aléatoire de descendants : le nombre de descendants d'un individu est une variable aléatoire. Les variables aléatoires pour chacun sont indépendantes et de même loi.

On s'intéresse aux conditions sous lesquelles on a extinction ou survie de l'espèce. On dit que la lignée est éteinte à la génération n si $Z_n = 0$ et on souhaite étudier la suite de terme général $P(Z_n = 0)$.

Formellement, le modèle est donné par :

$$Z_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_{n,i}$$

où les variables aléatoires $(X_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et sont **indépendantes et de même loi**. La variable $X_{n,i}$ est le nombre de descendants de l'individu numéro i de la génération n. On notera Y une autre variable aléatoire qui suit la même loi que les variables $X_{n,i}$.

Par exemple, si $Z_n = 12$ (la n-ième génération compte 12 individus) alors

$$Z_{n+1} = X_{n,1} + \cdots + X_{n,12} \;\; :$$

Z_{n+1} est la somme du nombre de descendants de chacun des 12 individus de la génération n. On remarquera que comme $Z_0 = 1$, $Z_1 = X_{0,1}$, qui est le nombre de descendants de l'unique individu de génération 0. Ainsi Z_1 et Y suivant la même loi.

1. On suppose que toutes les variables $X_{n,i}$ sont constantes égales à $q \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad Z_{n+1} = qZ_n.$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad Z_n = q^n.$$

2. **Dans cette question**, on suppose que le nombre de descendants de chaque individu suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
   (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = 0$ ou $Z_n = 1$ et que :
   $$P(Z_n = 1) = p^n.$$
   — *Initialisation* : Z_1 suit la loi $\mathcal{B}(p)$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
   — *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons la propriété vraie au rang n.
   Si $Z_n = 0$ alors $Z_{n+1} = 0$.
   Si $Z_n = 1$ alors l'unique individu de la n-ième génération peut avoir 0 ou 1 descendant de sorte que Z_{n+1} peut valoir 0 ou 1.
   De plus, par la formule des probabilités totales :
   $$\begin{aligned} P(Z_{n+1} = 1) &= P_{[Z_n=0]}(Z_{n+1} = 1)P(Z_n = 0) + P_{[Z_n=1]}(Z_{n+1} = 1)P(Z_n = 1) \\ &= 0 + pP(Z_n = 1) = p^{n+1}. \end{aligned}$$
   La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
   — *Conclusion* : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = 0$ ou $Z_n = 1$ et :
   $$P(Z_n = 1) = p^n.$$
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $Z_n(\Omega) = \{0,1\}$:
   $$P(Z_n = 0) = 1 - P(Z_n = 1) = 1 - p^n.$$
   Or $p \in]0,1[$ donc
   $$\lim_{n\to+\infty} P(Z_n = 0) = 1 - \lim_{n\to+\infty} p^n = 0.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que si $Z_n = 0$ alors $Z_{n+1} = 0$ c'est-à-dire :
   $$[Z_n = 0] \subset [Z_{n+1} = 0].$$
   Par croissance de P on en déduit que :
   $$P(Z_n = 0) \leq P(Z_{n+1} = 0) \quad \text{càd} \quad u_n \leq u_{n+1}.$$
   Ainsi (u_n) est croissante.
   De plus, elle est majorée par 1 (ses termes sont des probabilités !) donc par convergence monotone, elle est convergente.

Dans la suite du sujet, on appelle la limite de (u_n) **la probabilité d'extinction de la lignée**.

4. **Étude complète dans un cas simple.** Dans cette question uniquement, la loi de reproduction est la suivante : chaque individu a une probabilité $p \in]0,1]$ de donner deux descendants, par exemple en se divisant, et $1-p$ de disparaître sans descendant.
   (a) On a $Z_1(\Omega) = \{0,2\}$ avec :
   $$P(Z_1 = 0) = 1 - p \quad \text{et} \quad P(Z_1 = 2) = p.$$
   On en déduit :
   $$E(Z_1) = 2p \quad \text{et} \quad V(Z_1) = (2p)^2(1-p) + (2-2p)^2 p = 4p(1-p).$$

(b) D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $[Z_1 = 0], [Z_1 = 2]$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} = 0) &= P(Z_1 = 0)P_{[Z_1=0]}(Z_{n+1} = 0) + P(Z_1 = 2)P_{[Z_1=2]}(Z_{n+1} = 0). \\ &= (1-p)P_{[Z_1=0]}(Z_{n+1} = 0) + pP_{[Z_1=2]}(Z_{n+1} = 0). \end{aligned}$$

(c) Sachant que $Z_1 = 2$, la population s'éteint à la $n+1$-ième génération ssi les lignées des deux individus de première génération s'éteignent après n générations. L'extinction de chaque ligné en n génération est u_n et par indépendance la probabilités que les deux lignées s'éteignent est donc u_n^2 :

$$P_{[Z_1=2]}(Z_{n+1} = 0) = u_n^2.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on en déduit donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (1-p)P_{[Z_1=0]}(Z_{n+1} = 0) + pP_{[Z_1=2]}(Z_{n+1} = 0) \\ &= 1 - p + pu_n^2 \end{aligned}$$

car si la population s'est éteint à la deuxième génération, elle est éteinte avec à la $n+1$-ième aussi.

(d) En notant ℓ la limite de (u_n) et en passant à la limite dans l'identité de la question précédente, on obtient :

$$\ell = (1-p) + p\ell^2 \quad \text{i.e.} \quad p\ell^2 - \ell + 1 - p = 0.$$

Ainsi ℓ est solution d'une équation de degré deux de discriminant :

$$\Delta = 1 - 4p(1-p) = 4p^2 - 4p + 1 = (2p-1)^2.$$

Ainsi les valeurs possibles de ℓ sont :

$$\frac{1 \pm \sqrt{(2p-1)^2}}{2p} = \frac{1 \pm |2p-1|}{2p} \quad \text{i.e} \quad \frac{1-(2p-1)}{2p} \text{ ou } \frac{1+2p-1}{2p}.$$

Les deux limites possibles de (u_n) sont donc 1 et $\dfrac{1-p}{p}$.

(e) On suppose que $p \leq \dfrac{1}{2}$. Dans ce cas :

$$\frac{1-p}{p} \geq \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Or (u_n) est majorée par 1 donc sa limite est elle-même majorée par 1. Ainsi, on a nécessairement une probabilité d'extinction qui vaut 1.

(f) Supposons $p > 1/2$ de sorte que $\dfrac{1-p}{p} < 1$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq \frac{1-p}{p}.$$

— *Initialisation :* $u_0 = 1 - p \leq \dfrac{1-p}{p}$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

— *Hérédité :* soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $u_n \leq \dfrac{1-p}{p}$.

Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} = 1 - p + pu_n^2 \leq 1 - p + p\frac{(1-p)^p}{p^2} \\ &\leq \frac{(1-p)p + (1-p)^2}{p} \\ &= \frac{1-p}{p}. \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est vraie au rang $n+1$.

— *Conclusion :* on a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \leq \frac{1-p}{p} < 1.$$

On en déduit que la limite ℓ de (u_n) vérifie : $\ell \leq \dfrac{1-p}{p} < 1$.

Or $\ell \in \{1, \dfrac{1-p}{p}\}$ donc $\ell = \dfrac{1-p}{p}$.

(g) Tracer la probabilité d'extinction en fonction de $E(Z_1)$. Commenté le tracé obtenu. A FAIRE

5. Dans cette question uniquement, on suppose que la loi de reproduction est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Y = k) = p^k(1-p).$$

pour une certaine valeur $p \in]0, 1[$ fixée.

(a) Sachant $Z_1 = k$, la population s'éteint à la $(n+1)$-ième génération si et seulement si la lignée issue de chacun des k individus de la première génération s'éteint en n générations. L'extinction de chacune de ces lignées en n génération arrive avec probabilité u_n donc par indépendance des k lignées on en déduit : $P_{[Z_1=k]}(Z_{n+1} = 0) = u_n^k$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

La variable Z_1 suit la même loi que Y donc $([Z_1 = k])_{k \in \mathbb{N}}$ est une système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(Z_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{[Z_1=k]}(Z_{n+1} = 0)P(Z_1 = k) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_n^k p^k (1-p) \\ &= (1-p)\sum_{k=0}^{\infty}(u_n p)^k \\ &= (1-p) \times \frac{1}{1 - u_n p} \end{aligned}$$

car $pu_n \in [0, 1[$.

Ainsi on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1-p}{1 - pu_n}.$$

(b) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On a :

$$\ell = \frac{1-p}{1-p\ell} \Longleftrightarrow \ell(1-p\ell) = 1-p \Longleftrightarrow 0 = 1-p-\ell+p\ell^2$$

Il s'agit de la même équation qu'à la question **4.d** dont on a vu que les solutions sont $\dfrac{1-p}{p}$, 1 et la plus petite est :

— 1 si $p \leq \dfrac{1}{2}$

— $\dfrac{1-p}{p}$ si $p > \dfrac{1}{2}$.

(c) Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ alors $(Y+1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$. De plus pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$P(Y+1=k) = P(Y=k-1) = (1-p)p^{k-1}.$$

Donc $Y+1$ suit la loi géométrique de paramètre $1-p$.
On a alors $E(Y) = E(Y+1) - 1 = \dfrac{1}{1-p} - 1 = \dfrac{p}{1-p}$.
D'après les questions précédentes, la probabilité d'extinction vaut 1 si et seulement si $p \leq \dfrac{1}{2}$.
Une étude de la fonction $p \mapsto \dfrac{p}{1-p}$ montre que $\dfrac{p}{1-p} \leq 1$ si et seulement si $p \leq \dfrac{1}{2}$.
On obtient donc bien équivalence entre :

i. la probabilité d'extinction vaut 1.

ii. $E(Y) \leq 1$.

Commenter.

Partie 2. Modélisation informatique.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'implémentation informatique du processus de Galton-Watson. L'objectif est de faire des conjectures sur le comportement de la population dans le cas où la loi de reproduction est plus complexe : **on considèrera dans cette partie que les variables aléatoires $X_{n,i}$ suivent la loi de Poisson de paramètre** $\lambda > 0$.
On rappelle que la commande `rd.poisson(x)` simule une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre `x`.
La fonction suivant simule l'évolution d'une population et stocke le nombre d'individus à chaque génération dans une liste :

```
def galton_watson(lambda_,n):
        population = np.zeros(n+1)
        population[0] = 1
        Z = 1
        for i in range(1,n+1):
                descendants = 0
                for j in range(Z):
```

```
8                 descendants += rd.poisson(lambda_)
9             population[i] = descendants
10            Z = descendants
11            if descendants == 0:
12                return population
13    return population
```

6. **(a)** L'argument `n` correspond à la génération que l'on veut simuler et `lambda_` au paramètre de la loi de Poisson des variables $X_{n,i}$.

(b) À quoi servent les lignes suivantes ?

```
11            if descendants == 0:
12                return population
```

Comme `population` est initialisée à un vecteur nul, si la population s'éteint avec la n-ième génération (ligne 11) alors la population aux générations suivantes sera nulle aussi et il n'y a pas besoin de modifier `population` donc on peut s'arrêter là et renvoyer `population` (ligne 12).

```
2     population = np.zeros(n+1)
```

On initialise un vecteur `population` de taille $n+1$ avec des zéros que l'on va modifier au fur et à mesure.

```
6     descendants = 0
7     for j in range(Z):
8         descendants += rd.poisson(lambda_)
```

On initialise une variable `descendants` à 0 qui va servir à compter le nombre de descendants de la génération actuelle (ligne 6).

Pour chaque individu de la génération actuelle (dont le nombre est contenu dans la variable `Z`, ligne 7), on tire une variable de loi de Poisson de paramètre `lambda_` qui détermine le nombre de ses descendants et on l'ajoute à `descendants` (ligne 8).

7. On souhaite réaliser :

- des simulations pour différentes valeurs de λ ,
- pour chacun des choix, plusieurs simulations.

(a) Compléter le programme suivant pour qu'il réalise 10 simulations pour $\lambda = 0.7$ et 20 générations et les trace sur un même graphique.

```
lambda_ = 0.7
for k in range(10):
    plt.plot(range(0,21),galton_watson(0.7,20) )
plt.show()
```

(b) Pour λ valant 0.7 et 0.9 on constate que toutes les simulations mènent à l'extinction.

Pour λ on observe que le nombre de descendants semble diverger dans la plupart des simulations.

On peut donc conjecturer, en cohérence avec les exemples traités dans la partie précédente, que $p_\lambda = 1$ si et seulement si $\lambda \leq 1$.

8. Dans cette question, on s'intéresse à la probabilité d'extinction.

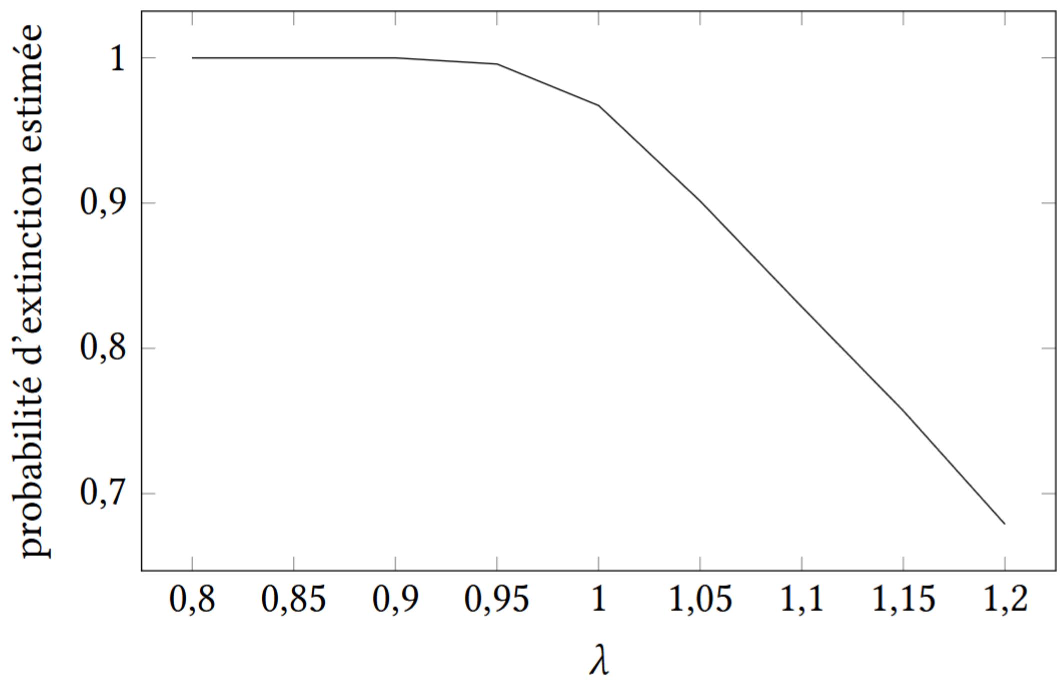
(a) Comment modifier la fonction `galton_watson` pour qu'elle renvoie 1 si la lignée est éteinte et 0 si la lignée n'est pas éteinte ?

```
def galton_watson2(lambda_,n):
        population = np.zeros(n+1)
        population[0] = 1
        Z = 1
        for i in range(1,n+1):
                descendants = 0
                for j in range(Z):
                        descendants += rd.poisson(lambda_)
                population[i] = descendants
                Z = descendants
                if descendants == 0:
                        return 1
        return 0
```

(b) Écrire une fonction `extinction`, qui prend entrée un paramètre `lambda_` et qui, à partir de 5000 simulations de Galton-Watson, renvoie une approximation de la probabilité d'extinction. (On s'arrêtera à 60 générations) :

```
def extinction(lambda_):
        p = 0
        for k in range(5000):
                p += galton_watson2(lambda_,60)
        return p/5000
```

La simulation pour différentes valeurs de λ donne le graphique suivant.
(On a pris λ entre 0.8 et 1.2 avec un pas de 0.05.)



9. On note p_λ la probabilité d'extinction.

(a) On peut conjecturer que la probabilité d'extinction p_λ est égale à 1 pour $\lambda \leq 1$ puis décroît strictement à partir de 1.

(b) Après n simulations, on note S_n le nombre d'entre elles qui ont mené à une extinction.

Les simulations étant indépendantes, S_n compte le nombre de succès (extinction) lorsqu'on répète n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p_λ. Ainsi S_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_\lambda)$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(|S_n - np_\lambda| \geq n\varepsilon\right) \leq \frac{V(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{p_\lambda(1-p_\lambda)}{n\varepsilon^2}$$

car $E(S_n) = np_\lambda$ et $V(S_n) = np_\lambda(1-p_\lambda)$.

Enfin, une étude de la fonction $x \mapsto x(1-x)$ montre qu'elle atteint son maximum en $\frac{1}{2}$ et que celui-ci vaut $\frac{1}{4}$. Donc :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\frac{S_n}{n} - \varepsilon \leq p_\lambda \leq \frac{S_n}{n} + \varepsilon \Longleftrightarrow \left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| \leq \varepsilon.$$

Donc :

$$\begin{aligned} P\left(\frac{S_n}{n} - \varepsilon \leq p_\lambda \leq \frac{S_n}{n} + \varepsilon\right) &= P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| \leq \varepsilon\right) \\ &= 1 - P(\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| > \varepsilon\right) \\ &\geq 1 - P(\left(\left|\frac{S_n}{n} - p_\lambda\right| \geq \varepsilon\right) \\ &\geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Enfin :

$$1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \geq 0.95 \Longleftrightarrow 0.05 \geq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \Longleftrightarrow \varepsilon \geq \frac{1}{\sqrt{0.2n}}.$$

(d) Pour $n = 5000$, le graphique précédent donne $\frac{S_n}{n}$ et le calcul ci-dessus donne

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1000}} = \frac{1}{10\sqrt{10}}.$$

— Pour $\lambda = 1.05$, on trouve $\frac{S_n}{n} \simeq 0.9$ donc $p_\lambda \in \left[0.9 - \frac{1}{10\sqrt{10}}, 0.9 + \frac{1}{10\sqrt{10}}\right]$ avec plus de 95% de chance.

- Pour $\lambda = 1.1$, on trouve $\dfrac{S_n}{n} \simeq 0.82$ donc $p_\lambda \in \left[0.82 - \dfrac{1}{10\sqrt{10}}, 0.82 + \dfrac{1}{10\sqrt{10}}\right]$ avec plus de 95% de chance.
- Pour $\lambda = 1.15$, on trouve $\dfrac{S_n}{n} \simeq 0.76$ donc $p_\lambda \in \left[0.76 - \dfrac{1}{10\sqrt{10}}, 0.76 + \dfrac{1}{10\sqrt{10}}\right]$ avec plus de 95% de chance.

déterminer graphiquement l'encadrement de p_λ obtenu lorsque $\lambda = 1.05$; $\lambda = 1.1$ et $\lambda = 1.15$

Annexe Python

Dans le module `matplotlib.pyplot` importé sous l'alias `plt` :
`plt.plot(X,Y)` prend en entrée deux vecteurs ou deux listes de même taille, et réalise le tracé des points d'abscisses prises dans X et d'ordonnées prises dans Y. Si on donne un seul argument à `plt.plot`, cela trace juste la suite des termes de X.
On utilise `plt.show()` pour afficher le tracé.

Dans le module `numpy` importé sous l'alias `np` :
`np.zeros(n)` crée une matrice unidimensionnelle de n coefficients tous nuls.

Dans le module `numpy.random` importé sous l'alias `rd` :
`rd.poisson(x)` simule une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre `x`.

FIN DU SUJET