Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD10

Applications linéaires

1 Applications linéaires, noyau, image

Exercice 1. Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires. Pour chaque application linéaire trouvée, déterminer son noyau et son image en en donnant une famille génératrice.

1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$.
2. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x - 3$.
3. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (y, x)$.
4. $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \mapsto (t \mapsto \dfrac{f(t)}{1+t^2})$.
5. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto 3x + 5y$.
6. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \mapsto (-x, y)$.
7. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$.

Exercice 2. Montrer que les applications suivantes sont linéaires et déterminer leur noyau et image en en donnant une base. Dire s'il s'agit d'application injective, surjective, d'endomorphisme, d'isomorphisme, d'automorphisme

1. L'application h définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X] \quad h(P) = XP(X+1) - (X+1)P(X).$$

2. L'application ψ définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$\forall X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \psi(X) = AX - XB$$

où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on note $u(f)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(f)(x) = f'(x) - \cos(x).f(x).$$

1. Montrer que $u : f \mapsto u(f)$ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer son noyau.
3. Montrer qu'elle est surjective.

Exercice 4.

1. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)dt\right) \end{aligned}$$

   (a) Montrer que φ est linéaire.
   (b) Déterminer son noyau et son image.
   (c) Montrer que $\varphi : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi)$ est un isomorphisme dont on donnera la bijection réciproque.

2. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

   (a) Montrer que φ est linéaire.
   (b) Déterminer son noyau et son image.

Exercice 5. Soient E un espace vectoriel et u, v deux endomorphismes de E qui commutent, ie :

$$u \circ v = v \circ u.$$

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k \circ v = v \circ u^k$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}.$$

2 Avec le théorème du rang

Exercice 6. Soient $n \geq 3$ et $b \in \mathbb{R}$. On considère l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : & \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ & P \longmapsto (X-b)(P' + P'(b)) - 2(P - P(b)). \end{aligned}$$

1. Vérifier que φ est bien définie (c'est-à-dire bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$) et est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \exists Q \in \mathbb{R}_n[X] \quad P = (X-b)^3 Q\}$.
   (a) Justifier que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \exists Q \in \mathbb{R}_{n-3}[X] \quad P = (X-b)^3 Q\}$.
   (b) Déterminer une base et la dimension de F.
   (c) Montrer , en étudiant $\varphi(P)''$, que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset F$.
   (d) Montrer de même que $\ker(\varphi) \subset \mathbb{R}_2[X]$.
   (e) Déterminer noyau et image de φ.

Exercice 7. Soit f l'application définie par

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} & \longmapsto (a+e+i, c+e+g, a+c+g+i). \end{aligned}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Sans calcul, justifier que f n'est pas injective.

3. Déterminer une base de $\ker(f)$ et sa dimension.
4. En déduire que f est surjective.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ une application non nulle telle que $f^2 = 0$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(f) \subset \ker(f)$.
2. Montrer que $\dim(\ker(f)) \geq 2$. En déduire que $\operatorname{rg}(f) = 1$.

Exercice 9. Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \mathbb{R}^2$. On considère :

$$H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = z = t\}.$$

Peut-on trouver une application linéaire de E dans F dont H est le noyau ?

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. la dimension de E est paire,
2. il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\ker(f) = \operatorname{Im}(f)$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ il existe un unique $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$P = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}.$$

3 Représentation matricielle

Exercice 12. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère les fonctions suivantes, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définies par les formules

$$p(x) = e^x \cos(x) \quad ; \quad q(x) = e^x \sin(x) \quad ; \quad r(x) = e^{-x} \cos(x) \quad ; \quad s(x) = e^{-x} \sin(x).$$

1. Montrer que ces quatre fonctions forment une famille libre dans l'espace vectoriel E.
   On note F le sous-espace vectoriel engendré par ces quatre fonctions.
2. On désigne par $D : E \to E$ l'application $f \mapsto f'$. Montrer que D, restreinte au sous-espace F, est un endomorphisme.
3. Écrire la matrice M de la restriction de D à F, dans la base (p, q, r, s).
4. Calculer l'inverse de M, et en déduire une primitive de

$$f : x \mapsto e^x(2\cos(x) + \sin(x)) + e^{-x}(\cos(x) - \sin(x)).$$

Exercice 13. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. On considère l'application φ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto AM - MA. \end{aligned}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Écrire la matrice C de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Déterminer le noyau de φ à l'aide de la matrice C. En déduire $\mathrm{rg}(\varphi)$.
4. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A, c'est-à-dire l'ensemble des matrices M telles que $AM = MA$.
   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel.
   (b) Déterminer une base de $\mathcal{C}$.

Exercice 14. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le noyau et l'image de f.
2. (a) Montrer que la famille (X, X^2+1, X^2-1) est une base $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer la matrice M' de f dans cette base.
   (c) Déterminer une matrice P telle que $M' = P^{-1}MP$.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice A de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \binom{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{j-1}{i-1} & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Justifier que A est inversible.
2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f(P) = P(X+1)$.
   (a) Déterminer la matrice de A dans la base canonique.
   (b) Justifier que f est bijective et déterminer son inverse.
   (c) En déduire A^{-1}.

Exercice 16. Soient $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ deux à deux distincts. On note φ l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(a_0), \ldots, \mathbb{P}(a_n)). \end{aligned}$$

1. (a) Montrer que φ est linéaire.
   (b) Déterminer son noyau et en déduire que φ est un isomorphisme.
2. Déterminer la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
3. On considère la famille suivante (voir TD6 exercice 5) :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad L_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}.$$

(a) Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Déterminer la matrice de φ dans la base $(L_0, \dots, L_n)$ et la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(c) En déduire pour tout $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, un polynôme P tel que

$$\varphi(P) = (x_0, \dots, x_n).$$

Exercice 17. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (1, X - 2X^2, 1 - 2X + X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de f relativement à la base $\mathcal{C}$ par la formule de changement de base.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ et on considère la base $\mathcal{F} = (e_0, \dots, e_{n-1})$ appelée base de Fourier et définie par :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad e_k = (1, e^{2i\pi\frac{k}{n}}, e^{2i\pi\frac{2k}{n}}, \dots, e^{2i\pi\frac{(n-1)k}{n}})$$

(ici i est le nombre complexe bien connu, pas un indice entier !)

1. Donner F, la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{C}^n$ à la base $\mathcal{F}$, et, après avoir calculé ${}^t\overline{F}F$,donner son inverse.
2. On se donne un vecteur $a \in \mathbb{C}^n$ et on considère une matrice A carrée d'ordre n, indicée par $[\![0, n-1]\!] \times [\![0, n-1]\!]$ dont le coefficient à la place (k, ℓ) est $a_{k-\ell}$ lorsque $k \geq \ell$ et $a_{n+k-\ell}$ lorsque $k < \ell$.
   (a) Représenter schématiquement une telle matrice A. On appelle une telle matrice une matrice cyclique, pourquoi ?
   (b) On considère l'endomorphisme de E dont la matrice par rapport à la base canonique est A. Calculer directement sa matrice dans la base $\mathcal{F}$.
   (c) Quelle relation matricielle donne le calcul effectué dans la question précédente ?