

## Mathématiques – TD11

## VARIABLES À DENSITÉ

**Exercice 1.** Dans chaque cas, déterminer si la variable aléatoire  $X$  dont la fonction de répartition est donnée est à densité ou non. Déterminer une densité le cas échéant.

$$1. \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^3 & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} .$$

$$2. \forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 - x)^{\frac{4}{3}} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} .$$

**Exercice 2** (Loi de Laplace). Soit  $c \in \mathbb{R}$ . on considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = ce^{-|x|}.$$

1. Déterminer les valeurs de  $c$  pour lesquelles  $f$  est une densité d'une variable aléatoire  $X$ .
2. Pour ces valeurs, déterminer la fonction de répartition de  $X$ .
3. Montrer que  $X$  possède une espérance et la calculer.
4. Même question pour la variance.

**Exercice 3.** Soit  $c$  une constante réelle et  $f$  la fonction de variable réelle définie par

$$f = c \cdot \left( \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{3}[} + \mathbf{1}_{[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] } + 2\mathbf{1}_{[\frac{2}{3}, 1]} \right)$$

1. Déterminer  $c$  pour que  $f$  soit une densité de probabilité.
2. Calculer la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle  $X$  ayant pour densité  $f$ .
3. Le nombre  $X$  tiré au hasard a-t-il plus de chances d'être  $> \frac{2}{3}$  ou d'être  $\leq \frac{2}{3}$  ?

**Exercice 4.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{(1+x)^3} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} .$$

1. Montrer que  $f$  est une densité d'une variable aléatoire  $X$  dont on donnera la fonction de répartition.
2. La variable  $X$  possède-t-elle une espérance ? une variance ? si oui, calculer les.

**Exercice 5** (Loi de Cauchy). Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

1. Montrer que  $f$  est une densité de probabilité. Dans la suite,  $X$  désigne une variable aléatoire de densité  $f$  (on dit que  $X$  suit la loi de Cauchy).
2. Déterminer la fonction de répartition de  $X$ .
3. La variable  $X$  admet-elle une espérance ? Une variance ?
4. Soit  $U$  de loi uniforme sur  $]0, 1[$ .
  - (a) Montrer que  $F_X$  est une bijection et déterminer  $F_X^{-1}$ .
  - (b) Déterminer la loi de  $F_X^{-1}(U)$ .
  - (c) En déduire une fonction Python simulant la variable aléatoire  $X$ .

**Exercice 6.** Déterminer si la fonction  $f$  suivante est une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$ . Si c'est le cas, calculer la fonction de répartition  $F_X$  d'une v.a.r.  $X$  ayant  $f$  pour densité et déterminer  $\mathbb{E}(X)$  si celle-ci existe. Préciser un segment de valeurs prises par  $X$  avec probabilité 1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(x) \cdot \mathbf{1}_{[0, \frac{\pi}{2}]}(x).$$

**Exercice 7.** Dans chaque cas, déterminer la fonction de répartition de  $Y$ , vérifier si  $Y$  est à densité ou non et déterminer une densité le cas échéant.

1. Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .

$$(a) Y = \sqrt{X}. \quad (b) Y = X^3. \quad (c) Y(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{X(\omega)} & \text{si } X(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Dans les cas (a) et (b), déterminer si l'espérance existe.

2.  $Y = X^2$  et  $X$  suit la loi :

$$(a) \mathcal{U}([0, 1]). \quad (b) \mathcal{N}(0, 1).$$

**Exercice 8.**

1. Soit  $U$  une variable aléatoire à densité de loi uniforme sur  $[0, 1]$ . On pose :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad E(\omega) = \begin{cases} -\ln(U(\omega)) & \text{si } U(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la loi de  $E$ .

2. Soit  $X$  une variable aléatoire de loi  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Quelle est la loi de  $-X$  ?
3. Soit  $X$  une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ . Quelle est la fonction de répartition de  $-X$  ? Sa loi ?

**Exercice 9.** Pour tout nombre réel  $x$ , on note  $[x]$  la partie entière de  $x$ , c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant :  $[x] \leq x < [x] + 1$ .

Soit  $X$  la variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ).

On pose  $Y = [X]$ . La variable  $Y$  est donc la partie entière de  $X$  et on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad [Y = k] = [k \leq X < k + 1].$$

1. (a) Montrer que  $Y$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{N}$ .
- (b) Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ , calculer  $\mathbb{P}(Y = k - 1)$ .
- (c) En déduire que la variable aléatoire  $Y + 1$  suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.

- (d) Donner l'espérance et la variance de  $Y + 1$ . En déduire l'espérance et la variance de  $Y$ .
2. On pose  $Z = X - Y$ .
- (a) Déterminer les valeurs prises par  $Z$ .
- (b) En utilisant le système complet d'évènements  $([Y = k])_{k \in \mathbb{N}}$ , montrer que :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \mathbb{P}(Z \leq x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

- (c) En déduire une densité  $f$  de  $Z$ .
- (d) Déterminer l'espérance  $\mathbb{E}(Z)$  de  $Z$ .

**Exercice 10.** Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- Montrer que  $g$  est dérivable sur  $] - \infty, 0[$  et sur  $]0, +\infty[$ . Est-elle continue en 0 ? Est-elle dérivable en 0 ?
- Montrer que la fonction  $g$  est une densité de probabilité. On note  $Y$  une variable aléatoire dont une densité est la fonction  $g$ , et dont la fonction de répartition est notée  $G$ .
  - Sans calcul, justifier que la fonction  $G$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
  - Montrer que pour tout réel  $x$ ,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x}(1 + x) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- (d) Montrer que la variable aléatoire  $Y$  admet une espérance, que l'on calculera.
3. On considère la variable aléatoire  $Z = e^Y$ .
- Déterminer la fonction de répartition notée  $H$  de la variable aléatoire  $Z$ .
  - En déduire que  $Z$  est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de  $Z$ .
  - La variable aléatoire  $Z$  admet-elle une espérance ?

**Exercice 11.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère la fonction  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} c_n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Déterminer  $c_n$  pour que  $f_n$  soit une densité de probabilité.
- Soit  $X_n$  une variable aléatoire ayant pour densité  $f_n$ . Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{E}(X_n^k) = \frac{n^k}{\binom{n+k+1}{k}}$$

- Trouver  $F_n$  la fonction de répartition de  $X_n$ .

4. Déterminer  $F(x)$ , la limite, si elle existe, de  $F_n(x)$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  et  $x \in \mathbb{R}$  est fixé.
5. Montrer que  $F$  ainsi définie est une fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité.

**Exercice 12.**

1. Déterminer la loi du maximum de 2 variables aléatoires indépendantes  $X_1$  et  $X_2$  suivant la loi uniforme sur  $[0, 1]$ .
2. Soient  $X_1, \dots, X_n$  avec  $n \geq 2$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi  $\mathcal{E}(\lambda)$  avec  $\lambda > 0$ . Déterminer la loi de  $\min(X_1, \dots, X_n)$ .

**Exercice 13.** Soit  $X, Y$  deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et suivant une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

Donner une densité de  $X + Y$ .

**Exercice 14** (Loi de Cauchy). Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

D'après exercice précédent, on sait que  $f$  est une densité de probabilité.

On considère  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de densité  $f$ . O

On pose  $Z = \frac{1}{2}(X + Y)$ .

Démontrer, en utilisant la formule de convolution, que  $Z$  suit la même loi que  $X$ .

*Indication : on écrira, pour  $x, s \in \mathbb{R}, s \neq 0$ ,*

$$\frac{1}{1+x^2} \frac{1}{1+(s-x)^2} = \frac{1}{s(s^2+4)} \left( \frac{2x+s}{1+x^2} + \frac{2(s-x)+s}{1+(s-x)^2} \right).$$

**Exercice 15.** Montrer (par récurrence) que si  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes de même loi  $\mathcal{E}(1)$ , alors  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  est à densité, une densité étant donnée par :

$$\forall s \in \mathbb{R}, f_n(s) = \frac{1}{(n-1)!} s^{n-1} e^{-s} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(s).$$

Quelle est l'espérance de  $S_n$ , sa variance ?

**Exercice 16.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires réelles *indépendantes* et  $S = X + Y$ , leur somme.

En appliquant la formule du produit de convolution, que l'on rappellera, donner la loi de  $S$  dans les cas

1.  $X, Y \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$  ;
2.  $X, -Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$  ;
3.  $X$  et  $Y$  ont pour densités respectives

$$f_X : x \mapsto \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} e^{-x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+} \quad \text{et} \quad f_Y : y \mapsto \frac{1}{(q-1)!} y^{q-1} e^{-y} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y),$$

où  $p, q \in \mathbb{N}^*$ .

**Exercice 17.** Soit  $X$  une variable aléatoire positive à densité de densité  $f$ . On suppose que  $f$  est continue.

1. Soit  $A > 0$ . Montrer :

$$\int_0^A tf(t)dt = \int_0^A P(X > t)dt + A(F_X(A) - 1).$$

2. En déduire que  $X$  possède une espérance si et seulement si  $\int_0^{+\infty} P(X > t)dt$  converge auquel cas :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} P(X > t)dt.$$