Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DM 4 – À RENDRE LE 12/02/2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats, étapes importantes, ...doivent être mis en valeurs.

Exercice 1 (d'après Oral Agro-Veto 2024)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application Φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ (avec n un entier fixé non nul) par :

$$\Phi : P(X) \longmapsto P(X+1) - P(X).$$

Dans la suite, un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ pourra être noté P ou $P(X)$.
Pour tout k entier non nul, on note Φ^k la composée k-ième de Φ, *i.e.* $\Phi^k = \underbrace{\Phi \circ \cdots \circ \Phi}_{\text{k fois}}$.

Par exemple, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $\Phi^2(P) = \Phi \circ \Phi(P) = \Phi(\Phi(P))$.

1. **(a)** Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Déterminer $\Phi(1)$ puis $\Phi(X^k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

(c) Calculer le noyau de Φ puis l'image de Φ.

(d) Donner la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

(e) Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\Phi(Q) = P$. Montrer que :

$$\sum_{i=0}^{n} P(i) = Q(n+1) - Q(0).$$

2. On considère la famille $(H_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $H_0 = 1$ et pour chaque entier i non nul :

$$H_i(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-i+1)}{i!} = \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k).$$

(a) Prouver que $(H_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Montrer que pour tout i entier entre 1 et n, $\Phi(H_i) = H_{i-1}$.

(c) En déduire la matrice de Φ dans la base $(H_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$.

(d) Montrer que pour tout i entier entre 1 et n, $\Phi^i(H_i) = 1$.

(e) En déduire que tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \Phi^k(P)(0) H_k(X).$$

3. En Python, un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est codé en listant ses $n+1$ coefficients par ordre croissant de degré.
Par exemple, dans $\mathbb{R}_4[X]$, $P = 5X^3 - 2X + 3$ sera représenté par la liste `[3,-2,0,5,0]`.

(a) Écrire une fonction Python qui prend en argument une liste de longueur $n+1$ modélisant un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et un réel a, et qui renvoie alors la liste représentant $(X-a)P$.

(b) Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie la liste représentant H_n.

4. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Montrer que $H_2(Y)$ possède une espérance et donner sa valeur.

(b) Déterminer les coordonnées de 1, X et X^2 dans la base (H_0, H_1, H_2).

(c) Retrouver la valeur de la variance de Y.

Exercice 2 (d'après Oral Agro-Veto 2022)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
On pose $T = \max(X, Y)$.

1. On rappelle que la commande `rd.rand()` du module `numpy.random` importé sous le nom `rd` simule une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $]0,1]$.
Justifier que :

```
def expo():
        return -np.log(rd.rand())
```

simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

2. (a) Déterminer la fonction de répartition de T.

(b) En déduire que T est à densité et trouver une de ses densités.

Comme $\mathbb{P}(T=0) = 0$, on admet qu'on peut définir la variable aléatoire $W = \dfrac{1}{T}$.

3. Démontrer que la variable aléatoire W admet une espérance si et seulement si l'intégrale $I = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$ converge.

4. (a) Justifier que pour tout réel u, $e^u \geq 1 + u$.

(b) En déduire que : $\forall t > 0, \quad 0 \leq \dfrac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \leq e^{-t}$.

(c) Démontrer que l'intégrale I est convergente.

5. À l'aide du changement de variable $u = 2t$, démontrer que :

$$\forall x > 0, \quad \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt = \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

On admettra que les intégrales de l'égalité sont bien convergentes.

6. Démontrer alors que $I = \displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(2 \int_x^{2x} \frac{e^{-2t}}{t} dt \right)$.

7. En utilisant le théorème des gendarmes, démontrer que l'espérance de W vaut $2\ln(2)$.