Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DM 4 – À RENDRE LE /2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats, étapes importantes, ...doivent être mis en valeurs.

Exercice 1 (d'après Oral Agro-Veto 2024)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application Φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ (avec n un entier fixé non nul) par :

$$\Phi : P(X) \longmapsto P(X+1) - P(X).$$

Dans la suite, un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ pourra être noté P ou $P(X)$.
Pour tout k entier non nul, on note Φ^k la composée k-ième de Φ, *i.e.* $\Phi^k = \underbrace{\Phi \circ \cdots \circ \Phi}_{\text{k fois}}$.

Par exemple, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $\Phi^2(P) = \Phi \circ \Phi(P) = \Phi(\Phi(P))$.

1. (a) Montrer que Φ est une application linéaire. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\Phi(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)(X+1) - (P + \lambda Q)(X) \\
&= P(X+1) + \lambda Q(X+1) - (P(X) + \lambda Q(X)) \\
&= P(X+1) - P(X) + \lambda(Q(X) - Q(X+1)) \\
&= \Phi(P) + \lambda \Phi(Q).
\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \Phi(P + \lambda Q) = \Phi(P) + \lambda \Phi(Q)$. Donc Φ est linéaire.
Par ailleurs il est clair que $\deg(P(X+1)) = \deg(P)$ donc

$$\deg(\Phi(P)) \leq \max(\deg(P), \deg(P(X+1)) \leq n.$$

L'application Φ est une application linéaire définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$, c'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. D'après la formule du binôme de newton on a :

$$(X+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i$$

et

$$\Phi(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i.$$

De plus,

$$\Phi(1)(X) = 1 - 1 = 0.$$

(c) Soit $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ avec $a_k \neq 0$ un polynôme de degré $k \geq 1$. Par linéarité de Φ on a donc :

$$\Phi(P) = \sum_{i=1}^{k} a_i \Phi(X^i) = a_k \Phi(X^k) + \sum_{i=1}^{k-1} a_i \Phi(X^i)$$

avec $\deg\left(\sum_{i=1}^{k-1} a_i \Phi(X^i)\right) \leq k-2$. Ainsi :

$$\deg(\Phi(P)) = \deg(a_k \Phi(X^k)) = k-1 \quad \text{car}$$

car $a_k \neq 0$ et $\deg(\Phi(X^k)) = k-1$ par la question précédente.
En particulier, on a montré :

$$\deg(P) \geq 1 \Rightarrow \deg(\Phi(P)) \geq 0 \Rightarrow \Phi(P) \neq 0$$

puisque le degré du polynôme nul est $-\infty$.
Par contraposée, $\ker(\Phi) \subset \mathbb{R}_0[X]$.
Réciproquement, il est clair que $\mathbb{R}_0[X] \subset \ker(\Phi)$.
Ainsi $\ker(\Phi) = \mathbb{R}_0[X]$.

Toujours d'après la question précédente, on sait que $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Or d'après le théorème du rang, on sait que :

$$n+1 = \dim(\ker(\Phi)) + \dim(\mathrm{Im}(\Phi)) = 1 + \dim(\mathrm{Im}(\Phi))$$

donc $\dim(\mathrm{Im}(\Phi)) = n$.
Ainsi $\mathrm{Im}(\Phi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ de dimension $n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ donc $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(d) On a vu que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\Phi(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i.$$

Ainsi la matrice recherchée est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \binom{n}{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(e) Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\Phi(Q) = P$. On a donc :

$$P(X) = Q(X+1) - Q(X).$$

Ainsi, par télescopage on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n} P(i) = \sum_{i=0}^{n} (Q(i+1) - Q(i)) = Q(n+1) - Q(0).$$

2. On considère la famille $(H_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $H_0 = 1$ et pour chaque entier i non nul :

$$H_i(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-i+1)}{i!} = \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k).$$

(a) Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $\deg(H_i) = i$. La famille $(H_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est une famille échelonnée de $n+1$ polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Soit 2 un entier entre 1 et n. On a

$$\begin{aligned}
\Phi(H_i)(X) = H_i(X+1) - H_i(X) &= \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X+1-k) - \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k) \\
&= \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-(k-1)) - \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k) \\
&= \frac{X+1}{i!}\prod_{k=1}^{i-1}(X-(k-1)) - \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k) \\
&= \frac{X+1}{i!}\prod_{k=0}^{i-2}(X-k) - \frac{1}{i!}\prod_{k=0}^{i-1}(X-k) \\
&= \frac{1}{i!}\left(X+1-(X-(i-1))\right)\prod_{k=1}^{i-2}(X-k) \\
&= \frac{i}{i!}\prod_{k=1}^{i-2}(X-k) \\
&= H_{i-1}(X).
\end{aligned}$$

De plus, $\Phi(H_1) = \Phi(X) = 1 = H_0$.

(c) D'après la question précédente, et compte tenu que $\Phi(H_0) = 0$ la matrice recherchée est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Par récurrence finie.

— Initialisation : $\Phi(H_1) = H_0 = 1$ d'après la question précédente.

— Hérédité : soit $i \in [\![1, n-1]\!]$ et supposons $\Phi^i(H_i) = 1$. D'après la question précédente :

$$\Phi^{i+1}(H_{i+1}) = \Phi^i(\Phi(H_{i+1})) = \Phi^i(H_i) = 1.$$

— Conclusion : pour tout i entier entre 1 et n, $\Phi^i(H_i) = 1$.

(e) Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme $(H_0, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe des réels a_k, $k \in [\![0, n]\!]$ tel que

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(X).$$

Comme $H_i(0) = 0$ pour tout $i \geq 1$, on a :

$$P(0) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(0) = a_0 H_0(0) = a_0.$$

Pour ℓ un entier fixé entre 1 et n, on a par linéarité :

$$\begin{aligned}
\Phi^\ell(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Phi^\ell(H_k) &= \sum_{k=0}^{\ell-1} a_k \Phi^\ell(H_k) + a_\ell \Phi^\ell(H_\ell) + \sum_{k=\ell+1}^{n} a_k \Phi^\ell(H_k) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell-1} a_k \Phi^{\ell-k}(\Phi^k(H_k)) + a_\ell + \sum_{k=\ell+1}^{n} a_k H_{k-\ell} \\
&= \sum_{k=0}^{\ell-1} a_k \Phi^{\ell-k}(1) + a_\ell + \sum_{k=\ell+1}^{n} a_k H_{k-\ell} \\
&= 0 + a_\ell + \sum_{k=\ell+1}^{n} a_k H_{k-\ell} \quad \text{car } \Phi(1) = 0 \\
&= a_\ell + \sum_{k=1}^{n-\ell} a_{k+\ell} H_k.
\end{aligned}$$

Ainsi, comme 0 est racine de $H_1, \ldots, H_n$: $a_\ell = \Phi^\ell(P)(0)$.
On a donc bien :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \Phi^k(P)(0) H_k(X).$$

3. En Python, un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est codé en listant ses $n+1$ coefficients par ordre croissant de degré.
Par exemple, dans $\mathbb{R}_4[X]$, $P = 5X^3 - 2X + 3$ sera représenté par la liste `[3,-2,0,5,0]`.

(a) Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Alors :

$$\begin{aligned}
(X-a)P &= \sum_{k=0}^{n} a_k X^{k+1} - a \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} X^k - a \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \\
&= a_n X^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (a_{k-1} - a a_k) X^k - a a_0.
\end{aligned}$$

On en déduit le programme :

```
def poly(L,a):
        Lnew = [0 for k in range(len(L)+1)]
        Lnew[0]=-a*L[0]
        Lnew[len(L)]=L[len(L)-1]
        for k in range(1,len(L)):
                Lnew[k]=L[k-1]-a*L[k]
        return Lnew
```

(b) On utilise le fait que $H_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}(X-n)H_n$ pour implémenter une programme récursif.

```
def H(n):
        if n == 0:
                return [1]
        else :
                return [1/n*x for x in poly(H(n-1),n-1)]
```

4. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) On a $H_2 = \dfrac{1}{2}X(X-1)$. D'après le théorème de transfert $H_2(Y)$ possède une espérance si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{k(k-1)}{2}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ est absolument convergente.
Comme la série est à termes positifs, la convergence absolue et la converge sont équivalents.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{2}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{\lambda^k}{(k-2)!}$$
$$= \frac{e^{-\lambda}}{2}\sum_{\ell=0}^{n-2}\frac{\lambda^{\ell+2}}{\ell!}$$
$$= \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}\sum_{\ell=0}^{n-2}\frac{\lambda^{\ell}}{\ell!}.$$

On reconnaît une somme partielle d'une série exponentielle de paramètre λ convergente. Ainsi la suite des sommes partielles de $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{k(k-1)}{2}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ est convergente donc $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{k(k-1)}{2}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ est (absolument) convergente.
La variable $H_2(Y)$ possède donc une espérance et :

$$\mathbb{E}(H_2(Y)) = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{\ell}}{\ell!} = \frac{\lambda^2}{2}.$$

(b) Comme $H_0 = 1$ les coordonnées de 1 dans la base (H_0, H_1, H_2) sont $(1, 0, 0)$.
Comme $H_1 = X$ les coordonnées de X dans la base (H_0, H_1, H_2) sont $(0, 1, 0)$.

Comme $H_2 = \dfrac{1}{2}X(X-1)$ les coordonnées de X^2 dans la base (H_0, H_1, H_2) sont $(0, 1, 2)$.

(c) On a par la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \mathbb{E}(Y + 2H_2(Y)) - E(Y)^2 = \lambda + 2\frac{\lambda^2}{2} - \lambda^2 = \lambda.$$

Exercice 2 (d'après Oral Agro-Veto 2022)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
On pose $T = \max(X, Y)$.

1. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1]$. La fonction python donnée simule $Z = -\ln(U)$ et il s'agit donc de vérifier que Z suit la loi exponentielle de paramètre 1.
On va déterminer sa fonction de répartition pour le vérifier : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_Z(x) = \mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(-\ln(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \geq e^{-x}).$$

Comme le support de U est $[0, 1]$ alors :
- si $x < 0$ alors $e^{-x} > 1$ donc $\mathbb{P}(U \geq e^{-x}) = 0$;
- si $x \geq 0$ alors $e^{-x} \leq 1$ donc $\mathbb{P}(U \geq e^{-x}) = \mathbb{P}(e^{-x} \leq U \leq 1) = 1 - e^{-x}$.

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On reconnaît donc bien la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1.

2. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t) &= \mathbb{P}([X \leq t] \cap [Y \leq t]) \\ &= \mathbb{P}([X \leq t])\mathbb{P}([Y \leq t]) \quad \text{par indépendance} \\ &= F_X(t)F_Y(t) \\ &= F_X(t)^2 \end{aligned}$$

(b) La fonction F_T est continue sur $\mathbb{R}$ car F_X l'est et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$ car F_X l'est.
Donc T est à densité. De plus, pour tout $t \neq 0$ on a :

$$F_T(t) = 2F_X'(t)F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2e^{-x}(1 - e^{-x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

En particulier, la fonction f définie ci-dessous est une densité de T :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2e^{-x}(1 - e^{-x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Comme $\mathbb{P}(T=0)=0$, on admet qu'on peut définir la variable aléatoire $W=\dfrac{1}{T}$.

3. D'après le théorème de transfert, la variable W admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}f(x)dx$ converge absolument (où f est la fonction définie à la question précédente).
Or
— l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x}f(x)dx$ converge absolument et est nulle car $x\mapsto \dfrac{1}{x}f(x)$ est nulle sur $]0,+\infty[$;
— $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x}f(x)dx = 2\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}dx$ et l'intégrande est positif de sorte que la convergence absolue et la converge de cette intégrale sont équivalentes.

Donc finalement, la variable aléatoire W admet une espérance si et seulement si l'intégrale $I=2\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}dt$ converge.

4. **(a)** On étudie la fonction $g : u\mapsto e^u-(1+u)$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\forall u\in\mathbb{R},\quad g'(u)=e^u-1.$$

On en déduit :

u	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'(u)$		$-$	0	$+$	
Variations de g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Cela montre que : $\forall u\in\mathbb{R},\quad g(u)\geq 0$.
Autrement dit pour tout réel u, $e^u\geq 1+u$.

(b) Soit $t>0$. En appliquant la question précédente avec $u=-t$, on a :

$$e^{-t}\geq 1-t$$

ou encore :

$$t\geq 1-e^{-t}.$$

En factorisant le membre de droite par e^t il vient :

$$t\geq e^t(e^{-t}-e^{-2t}).$$

Puis en divisant membre à membre par $te^t>0$:

$$e^{-t}\geq \frac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}.$$

Enfin, il est clair, par croissance de la fonction exponentielle, que le membre de droite est positif.

Ainsi : $\forall t>0,\quad 0\leq \dfrac{e^{-t}-e^{-2t}}{t}\leq e^{-t}$.

(c) On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente donc avec la question précédente, le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions continues positives permet de conclure que I est convergente.

5. *On admet que les intégrales de l'égalité sont bien convergentes.*
Soit $x > 0$. La fonction $u : t \mapsto 2t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[x, +\infty[$ et $u([x, +\infty[) = [2x, +\infty[$. Comme on admet la convergence des intégrales, en effectuant le changement de variable dans la première intégrale on a :

$$\begin{aligned}\int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}dt = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u(t)}}{\frac{u(t)}{2}}dt &= \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u(t)}}{u(t)}2dt \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u(t)}}{u(t)}u'(t)dt \\ &= \int_{u(x)}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}du \\ &= \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}du\end{aligned}$$

6. Soit $x > 0$. Par la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\int_x^{2x} \frac{e^{-2t}}{t}dt &= \int_x^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}dt - \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}dt \\ &= \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt - \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t}dt \quad \text{(par la question précédente)} \\ &= \int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}dt\end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{x\to 0}\left(2\int_x^{2x} \frac{e^{-2t}}{t}dt\right) = 2\lim_{x\to 0}\int_{2x}^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}dt = I.$$

7. Maintenant, en reprenant la question 3, le théorème de transfert permet de conclure avec 4.c) que W possède une espérance et que :

$$\mathbb{E}(W) = I.$$

Montrons que $I = 2\ln(2)$.
Soit $x > 0$. On a par décroissance de la fonction $t \mapsto e^{-t}$ sur $[x, 2x]$:

$$\forall t \in [x, 2x], \qquad \frac{2e^{-2x}}{t} \leq \frac{2e^{-2t}}{t} \leq \frac{2e^{-x}}{t}.$$

En intégrant sur $[x, 2x]$ on obtient, par croissance de l'intégrale :

$$\int_x^{2x} \frac{2e^{-2x}}{t}dt \leq \int_x^{2x} \frac{2e^{-2t}}{t}dt \leq \int_x^{2x} \frac{2e^{-x}}{t}dt.$$

Or :

$$\int_x^{2x} \frac{2e^{-2x}}{t}dt = 2\mathrm{e}^{-2x}(\ln(2x) - \ln(x)) = 2\ln(2)e^{-2x}$$

et
$$\int_x^{2x} \frac{2e^{-x}}{t} dt = 2\mathrm{e}^{-x}(\ln(2x) - \ln(x)) = 2\ln(2)e^{-x}.$$
On en conclut que pour tout $x > 0$:
$$2\ln(2)e^{-2x} \leq 2\int_x^{2x} \frac{e^{-2t}}{t} dt \leq 2\ln(2)e^{-x}.$$
En faisant tendre x vers 0 on obtient par le théorème des gendarmes :
$$\lim_{x\to 0} 2\int_x^{2x} \frac{e^{-2t}}{t} dt = 2\ln(2)$$
ce qui permet de conclure avec la question précédente.