Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD12

Couples de variables discrètes

Exercice 1. On lance deux dès à quatre faces numérotées de 1 à 4, l'un bleu, l'autre rouge. On suppose les dés équilibrés et les lancers indépendants. On suppose que l' expérience peut être modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on note X la variable aléatoire donnant la valeur du dé bleu et Y celle donnant la somme des valeurs des deux dés.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer la loi de Y.
3. Déterminer la loi de X sachant $[Y = 5]$.

Exercice 2. Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $0 < p < 1$. On suppose que

- X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$
- $Y(\Omega) = \mathbb{N}$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$ est une loi binomiale de paramètre (n, p).

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.
3. Déterminer, pour $m \in \mathbb{N}$, la loi de X sachant $(Y = m)$. Comment qualifier la loi de $X - m$ conditionnelle à $(Y = m)$?

Exercice 3. Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce ayant la probabilité $p \in]0, 1[$ d'obtenir Pile et la probabilité $1 - p$ d'obtenir Face.
Le joueur A commence et s'arrête dès il obtient un Pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués. Le joueur B effectue alors le même nombre de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de Piles obtenus par le joueur B.

1. Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geq 1$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.
2. Quelles sont les valeurs prises par Y ?
3. Montrer que $P([Y = 0]) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{2k-1} = \frac{1-p}{2-p}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $P([Y = n]) = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1}(1-p)^{2k-n-1}$.

Exercice 4. On lance indéfiniment une pièce donnant Pile avec probabilité p et Face avec probabilité $1 - p$ $(0 < p < 1)$. Pour tout entier $k > 0$, on note P_k l'événement « la pièce donne Pile au k-ième lancer » et F_k l'événement « la pièce donne Face au k-ième lancer ». On note X le rang du premier Pile et Y le rang du deuxième Pile.

1. Reconnaître, sans calcul, la loi de X.

2. Déterminer la loi de (X, Y).
3. En déduire la loi de Y.
4. Déterminer la loi de $Y - X$. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 5. Soient p_1, p_2, p_3 des réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $D_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j \leq n\}$ et on pose :

$$\forall (i, j) \in D_n, \quad p(i, j) = \frac{n!}{i!j!(n - i - j)!} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j}.$$

1. Pour quelles valeurs de p_1, p_2, p_3 définit-on ainsi la loi conjointe d'un couple de variables (X, Y) ?
2. Déterminer les lois marginales de X et Y ainsi que leur espérance et variance.

Exercice 6. Le jour du premier de l'an, le nombre de personnes N hospitalisées pour section des veines du poignet suite à ouverture d'huîtres suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 100$. Les constatations des praticiens sur 100 ans indiquent que, sachant qu'il y a $N = n$ victimes, le nombre F de femmes victimes suit une loi binomiale de paramètre n et $p = 0.25$. On note H le nombre d'hommes.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de H sachant $(N = n)$.
2. Déterminer les lois de H et F, donner leurs espérances et leurs variances.
3. H et F sont elles indépendantes ?
4. Quelle est la probabilité qu'il y ait autant d'hommes que de femmes ? Donner le résultat sous forme d'une somme.

Exercice 7. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes.

1. On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(k_i, p)$. Montrer que
$$X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(k_1 + \cdots + k_n, p).$$
2. On suppose que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_i)$. Montrer que
$$X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n).$$

Exercice 8. Soit Y une variable aléatoire dont la loi est donnée par $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(Y = n) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-n}.$$

1. Montrer que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de Y.
2. Soit U une variable de Bernoulli telle que $\mathrm{P}(U = 1) = P(U = 0) = \frac{1}{2}$. On suppose que les variables aléatoires U et Y sont indépendantes et on note $T = (2U - 1) Y$.
   (a) Justifier T est une variable aléatoire discrète et déterminer sa loi.
   (b) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance $E(T)$ et calculer $E(T)$.
   (c) Vérifier que $T^2 = Y^2$. En déduire que la variable aléatoire T admet une variance $V(T)$ et calculer $V(T)$.

Exercice 9. On fait deux biopsies à un patient. Dans la première n cellules sont étudiées et on désigne par X le nombre de cellules malignes. Dans la seconde, m cellules sont prélevées et on note Y le nombre de cellules malignes.
La probabilité qu'une cellule soit maligne est notée p.

1. Par quelle loi peut-on modéliser les variables X et Y ?
2. Que représente $X + Y$? Déterminer sa loi.
3. Le laborantin a mélangé par inadvertance les deux éprouvettes. Quelle est alors la loi conditionnelle de X sachant $[X + Y = k]$ avec $k \in [\![0, m + n]\!]$?

Exercice 10. Soit $p \in]0, 1[$. Sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on considère deux variables aléatoires réelles indépendantes G_1 et G_2 suivant la même loi géométrique de paramètre p.

1. (a) Déterminer la loi de $G_1 + G_2$. Possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
   (b) Déterminer la loi de $G_1 - G_2$. Possède-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
   (c) Les variables $G_1 + G_2$ et $G_1 - G_2$ sont-elles indépendantes ?
   (d) Déterminer la covariance de $(G_1 + G_2, G_1 - G_2)$.
2. (a) Déterminer la loi de $I = \min(G_1, G_2)$ et $S = \max(G_1, G_2)$.
   (b) Possèdent-elles une espérance ? Si oui, les calculer.
   (c) Déterminer la variance de I.
   (d) Déterminer la covariance de (I, S) et en déduire la variance de S.
3. Déterminer, si elle existe, l'espérance de $|G_1 - G_2|$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p \in]0, 1[$. On considère une équipe de n tireurs à la carabine qui cherchent à atteindre une cible éloignée. Chaque tireur tire deux fois. Pour un tireur donné, la probabilité de toucher la cible au premier tir est p et celle de toucher la cible au second tir est aussi égale à p. On suppose qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui modélise cette expérience de sorte que les tireurs et les lancers sont indépendants. On note A la variable aléatoire qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible au premier et au deuxième coup et B la variable aléatoire qui donne le nombre de joueurs qui touchent la cible lors d'un seul des deux tirs.

1. Déterminer les lois de A et B.
2. Les variables A et B sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la covariance de A et B.

Exercice 12. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.
Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1; n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.
2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?
3. Soit $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
   (a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.
   (b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).