Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD13

Réduction

1 Diagonalisation

Exercice 1. Déterminer les éléments propres des endomorphismes suivants :

1. f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :
$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f((x,y,z)) = (2x - z, y, 3x - 2z).$$
2. φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par :
$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \varphi(P) = (X+1)P'(X) + P(X).$$
3. $D \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}))$ défini par
$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}), \quad D(f) = f'.$$
4. $S \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$ défini par
$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \quad S(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Exercice 2. Déterminer les éléments propres des matrices suivantes, dire si elles sont diagonalisables et, le cas échéant, trouver une matrice diagonale D et une matrice inversible P qui la diagonalisent.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
2. $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
3. $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;
4. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
5. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;
6. $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Si oui, construire P une matrice de passage telle que $P^{-1}.A.P$ est diagonale et déterminer P^{-1}.
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.

Exercice 4. Soient a, b, c trois réels et $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de a, b, c pour lesquels la matrice A est diagonalisable.

Exercice 5 (Co-diagonalisation). Soit

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

1. Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de A et B. Montrer qu'elles sont diagonalisables avec la même matrice de passage P que l'on précisera.
2. En déduire les valeurs propres de la matrice $M(a,b)=\begin{pmatrix}b&-b&a\\-b&b&-a\\a&-a&2b-a\end{pmatrix}$ où a,b sont deux réels quelconques.

Exercice 6. Soit a,b,c des nombres réels tous strictement positifs et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice dans la base canonique

$$\begin{pmatrix}0&0&0&a\\0&0&b&0\\0&c&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 7 (Avec un polynôme annulateur). Soit

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ que l'on déterminera telle que pour tout $n\geq 1$ on ait : $A^n=u_nA$.
2. Étudier l'inversibilité de A et celle de $A-3I_3$, en déduire que $\{0,3\}\subset \mathrm{Spec}(A)$.
3. Réciproquement si λ est valeur propre de A, montrer que $\lambda=0$ ou 3.
4. Diagonaliser A.

Exercice 8 (Avec un polynôme annulateur.). Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E tel que $u^2\neq 0$ et $u^3=0$.

1. Déterminer le spectre de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
2. Montrer qu'il existe $x\in\mathbb{E}$ tel que $(x,u(x),u^2(x))$ soit une base de E.
3. Montrer qu'il existe une base B de E tel que la matrice de u dans cette base s'écrit :

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

.

2 Applications et approfondissements

Exercice 9. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les valeurs propres de A et, pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé.
2. En déduire une matrice $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux rangés dans l'ordre croissant, et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telles que $A = PDP^{-1}$, et calculer P^{-1}.
3. On note C_A, l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que
$$AM = MA.$$
De même on note C_D, l'ensemble des matrices N de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que
$$DN = ND.$$
   (a) Montrer que C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
   (b) Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer :
$$M \in C_A \Longleftrightarrow N \in C_D.$$
   (c) Déterminer C_D, en utilisant les coefficients des matrices.
   (d) En déduire :
$$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} ; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$
   (e) Déterminer une base de C_A et la dimension de C_A.

Exercice 10. On considère le système différentiel suivant :
$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{2y_1 - y_2 - y_3}{3} \\ y_2' = \dfrac{-y_1 + 2y_2 - y_3}{3} \\ y_3' = \dfrac{-y_1 - y_2 + 2y_3}{3} \end{cases}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ et $Y'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix}$

1. Montrer que (y_1, y_2, y_3) est solution du système si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $Y'(t) = AY(t)$ où A est une matrice à déterminer.
2. (a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
   (b) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $X(t) = P^{-1}Y(t)$.
   (a) Montrer que (y_1, y_2, y_3) est solution du système si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = DX(t)$.
   (b) Résoudre le système : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = DX(t)$.
   (c) En déduire les solutions (y_1, y_2, y_3) du système initial.

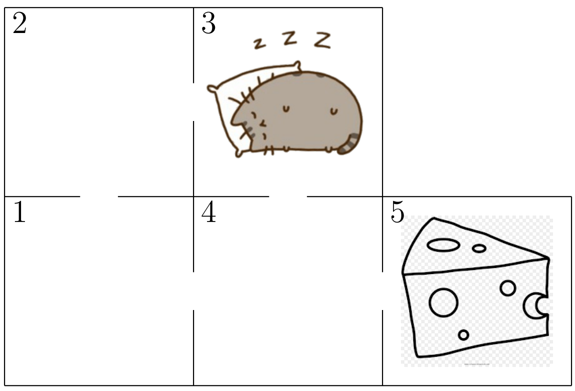
Exercice 11. On souhaite étudier les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} & = & -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} & = & -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{array} \right.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Que vaut X_0 ?
2. Déterminer une matrice C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :
$$X_{n+1} = CX_n.$$
3. Déterminer le spectre et les sous-espaces propres de C. Est-elle diagonalisable ?
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.
5. Exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 12 (Le chat et la souris). Une souris se balade au hasard dans une maison à la recherche de nourriture.
Si, à l'instant n, elle se trouve dans une pièce vide alors elle choisit une pièce adjacente au hasard (selon une loi uniforme) et s'y rend à l'instant $n + 1$.
Si elle est à l'instant n dans une pièce où se trouve de la nourriture (un fromage par exemple), elle y reste.
Mais attention ! Si par malheur elle rentre dans une pièce où se trouve un chat, elle se fait manger (et on considère donc qu'elle reste dans cette pièce).
Heureusement pour la souris, le chat est confortablement installé pour sa sieste et reste donc toujours dans la même pièce. Le plan de la maison est donné ci-dessous.



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire donnant la position de la souris à l'instant n et on note V_n :

$$V_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = 5) \end{pmatrix}.$$

1. (a) À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_{n+1} = MV_n.$$
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n = M^n V_0$.
   (c) Déterminer le spectre de M. Est-elle diagonalisable ? Si oui, trouver une matrice D semblables à M.
   (d) Déterminer les sous-espaces propres associés.
   (e) On suppose que la souris par de la pièce 1. Après une très grande durée, dans quelle pièce a-t-elle le plus de chance de finir ?
2. Soient $n \geq 0$ et $r \geq 1$ deux entiers.
Soient $(i_0, \ldots, i_n, j_{n+1}, \ldots, j_{n+r}) \in \{1, \ldots, 5\}^{n+r+1}$ tels que : $\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) > 0$. Montrer :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{[X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n]}(X_{n+1} = j_{n+1}, \ldots, X_{n+r} = j_{n+r}) &= \mathbb{P}_{[X_n=i_n]}(X_{n+1} = j_{n+1}, \ldots, X_{n+r} = j_{n+r}) \\ &= \mathbb{P}_{[X_0=i_n]}(X_1 = j_{n+1}, \ldots, X_r = j_{n+r}) \\ &= m_{i_n,j_{n+1}} m_{j_{n+1},j_{n+2}} \ldots m_{j_{n+r-1},j_{n+r}} \end{aligned}$$
où $m_{i,j}$ désigne le coefficient d'indices (j, i) de la matrice M.
3. On note T_5 la variable aléatoire définie par $T_5 = \inf\{n \geq 0 \ ; \ X_n = 5\}$.
La variable aléatoire T_5 représente le temps que la souris met pour atteindre le fromage (la première fois).
Pour tout $i \in E$ on note $u_i = \mathbb{P}_{[X_0=i]}(T_5 < +\infty)$.
Ainsi u_i est la probabilité que la souris atteigne le fromage en partant de la pièce n°i.
   (a) Calculer u_5 et u_3.
   (b) Montrer :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ [T_5 = n] = \bigcup_{(x_0,\ldots,x_{n-1}) \in \{1,2,3,4\}^n} [X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = 5].$$
   (c) En déduire que pour tout $n \geq 2$ et tout (i, j) tels que $\mathbb{P}(X_0 = i, X_1 = j) > 0$ on a :
$$\mathbb{P}_{[X_0=i,X_1=j]}(T_5 = n) = \mathbb{P}_{[X_0=j]}(T_5 = n - 1).$$
   (d) En déduire que $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ est solution du système :
$$\begin{cases} u_1 &= \frac{1}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_4 \\ u_2 &= \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_3 \\ u_3 &= 0 \\ u_4 &= \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_5 \\ u_5 &= 1. \end{cases}$$

(e) Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit Φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Phi(P) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)}.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. On note Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Delta(P) = P'$.
   (a) Déterminer la matrice D de Δ dans la base canonique.
   (b) On note A la matrice de Φ dans la base canonique.
   Montrer : $A = (I_{n+1} + D)^n$.
3. **Python**
   (a) Écrire une fonction Python qui prend un entier $n \in \mathbb{N}^*$ en argument et renvoie la matrice D sous forme de tableau `numpy`.
   (b) Même question avec A.
   (c) En déduire une fonction qui prend en entrées n et un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ (représenté par la liste de ses $n+1$ coordonnées) et qui renvoie les coordonnées de $\Phi(P)$ (dans la base canonique).
4. Montrer que Φ est bijective.
5. Déterminer le spectre de Φ et ses sous-espaces propres.
6. Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons la matrice $n \times n$:

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour $1 \leq \ell \leq n$, on pose $\theta_\ell = \dfrac{\ell\pi}{n+1}$ et on note :

$$v_\ell = (\sin(k\theta_\ell))_{1 \leq k \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

1. (a) Pour $x, y \in \mathbb{R}$, factoriser $\sin(x-y) + 2\sin(x) + \sin(x+y)$.
   (b) Soit $1 \leq \ell \leq n$. Déterminer $\lambda_\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\Delta_n v_\ell = \lambda_\ell v_\ell$.
2. Montrer que la matrice Δ_n est diagonalisable.
3. Montrer que la matrice Δ_n est inversible.