Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD13

Réduction

1 Diagonalisation

Correction de l'exercice 1.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ non nul.

$$\begin{aligned} f((x,y,z)) = \lambda(x,y,z) &\iff (2x-z, y, 3x-2z) = \lambda(x,y,z) \\ &\iff \begin{cases} 2x - z &= \lambda x \\ y &= \lambda y \\ 3x - 2z &= \lambda z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (2-\lambda)x - z &= 0 \\ (1-\lambda)y &= 0 \\ 3x - (2+\lambda)z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \dfrac{1-\lambda^2}{3}z &= 0 \\ (1-\lambda)y &= 0 \\ 3x-(2+\lambda)z &= 0 \end{cases} \quad L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2-\lambda}{3}L_3 \end{aligned}$$

Cas où $\lambda \notin \{-1,1\}$: on obtient alors :

$$f((x,y,z)) = \lambda(x,y,z) \iff \begin{cases} \dfrac{1-\lambda^2}{3}z &= 0 \\ (1-\lambda)y &= 0 \\ 3x-(2+\lambda)z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z &= 0 \\ y &= 0 \\ x &= 0 \end{cases}$$

ce qui contredit le fait que (x,y,z) est non nul.
Cela signifie que pour $\lambda \notin \{-1,1\}$ l'équation $f((x,y,z)) = \lambda(x,y,z)$ n'a pas de solution non nulle : λ n'est donc pas une valeur propre.

Cas où $\lambda = -1$: on obtient alors :

$$f((x,y,z)) = \lambda(x,y,z) \iff \begin{cases} \dfrac{1-\lambda^2}{3}z &= 0 \\ (1-\lambda)y &= 0 \\ 3x-(2+\lambda)z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= 0 \\ 3x - z &= 0 \end{cases}$$

Le système possède donc des solutions non nulles : -1 est une valeur propre. Le sous-espace propre associé (l'ensemble des solutions du système ci-dessus) est :

$$E_{-1}(f) = \text{Vect}\left((1,0,3)\right).$$

Cas où $\lambda = 1$: on obtient alors :

$$f((x,y,z)) = \lambda(x,y,z) \iff \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{1-\lambda^2}{3}z & = & 0 \\ (1-\lambda)y & = & 0 \\ 3x-(2+\lambda)z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} 3x-3z & = & 0 \end{array} \right.$$

Le système possède donc des solutions non nulles : 1 est une valeur propre. Le sous-espace propre associé (l'ensemble des solutions du système ci-dessus) est :

$$E_1(f) = \text{Vect}\left((1,0,1),(0,1,0)\right).$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ non nul.

$$\begin{aligned} \varphi(P) = \lambda P &\iff (X+1)(2aX+b) + aX^2 + bX + c = \lambda(aX^2+bX+c) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccc} 3a & = & \lambda a \\ 2a+2b & = & \lambda b \\ b+c & = & \lambda c \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccc} (3-\lambda)a & = & 0 \\ 2a+(2-\lambda)b & = & 0 \\ b+(1-\lambda)c & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Cas où $\lambda \notin \{3,2,1\}$: on obtient alors :

$$\varphi(P) = \lambda P \iff \iff \left\{ \begin{array}{ccc} (3-\lambda)a & = & 0 \\ 2a+(2-\lambda)b & = & 0 \\ b+(1-\lambda)c & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & 0 \\ b & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array} \right.$$

ce qui contredit le fait que P est non nul.
Cela signifie que pour $\lambda \notin \{1,2,3\}$ l'équation $\varphi(P) = \lambda P$ n'a pas de solution non nulle : λ n'est donc pas une valeur propre.

Cas où $\lambda = 3$: on obtient alors :

$$\varphi(P) = \lambda P \iff \left\{ \begin{array}{ccc} (3-\lambda)a & = & 0 \\ 2a+(2-\lambda)b & = & 0 \\ b+(1-\lambda)c & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} 2a-b & = & 0 \\ b-2c & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} a & = & c \\ b & = & 2c \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$\varphi(P) = 3P \iff P = c(X^2+2X+1).$$

Le système possède donc des solutions non nulles : 3 est une valeur propre. Le sous-espace propre associé (l'ensemble des solutions du système ci-dessus) est :

$$E_3(\varphi) = \text{Vect}\left(X^2+2X+1\right).$$

Cas où $\lambda = 2$: on obtient alors :

$$\varphi(P) = \lambda P \iff \left\{\begin{array}{rcl} (3-\lambda)a & = & 0 \\ 2a+(2-\lambda)b & = & 0 \\ b+(1-\lambda)c & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b-c & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & c \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$\varphi(P) = 2P \iff P = c(X+1).$$

Le système possède donc des solutions non nulles : 2 est une valeur propre. Le sous-espace propre associé (l'ensemble des solutions du système ci-dessus) est :

$$E_2(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(X+1)\,.$$

Cas où $\lambda = 1$: on obtient alors :

$$\varphi(P) = \lambda P \iff \left\{\begin{array}{rcl} (3-\lambda)a & = & 0 \\ 2a+(2-\lambda)b & = & 0 \\ b+(1-\lambda)c & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi :

$$\varphi(P) = P \iff P = c.$$

Le système possède donc des solutions non nulles : 1 est une valeur propre. Le sous-espace propre associé (l'ensemble des solutions du système ci-dessus) est :

$$E_1(\varphi) = \mathrm{Vect}\,(1)\,.$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ non nulle. Le vecteur f est vecteur propre de D associé à la valeur propre λ si et seulement si

$$D(f) = \lambda f$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = \lambda f(t).$$

Cette équation différentielle se résout en

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \ f(t) = Ce^{\lambda t}.$$

On en déduit que tout réel λ est valeur propre de D, l'espace propre associé est

$$E_\lambda(D) = \mathrm{Vect}(e_\lambda)$$

où $e_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite non nulle.
Le vecteur u est vecteur propre de S associé à la valeur propre λ si et seulement si

$$S(u) = \lambda.u$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \lambda u_n.$$

Cette récurrence se résout en

$$\exists C \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = C\lambda^n$$

On en déduit que tout complexe λ est valeur propre de D, l'espace propre associé est, en posant $g_\lambda = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite géométrique de raison λ,

$$E_\lambda(D) = \mathrm{Vect}(g_\lambda).$$

Correction de l'exercice 2.

1. La matrice A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$.
   On remarque que :
   $$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   et on voit alors facilement que :
   $$\ker(A - I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
   De même :
   $$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   et on voit alors facilement que :
   $$\ker(A - 2I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$
   La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A donc A est diagonalisable et en posant :
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   on a, par les formules de changement de base :
   $$A = PDP^1.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - **Méthode 1 : par le rang.** On a :
     $$\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(C) \iff C - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible } \iff \mathrm{rg}(C - \lambda I_2) < 2.$$
     Or :
     $$\begin{aligned} \mathrm{rg}(C - \lambda I_2) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & -1 \end{pmatrix}\right) \quad L_1 \longleftrightarrow L_2 \\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 0 & -1-(1-\lambda)^2 \end{pmatrix}\right) \quad L_2 \longleftarrow L_2 - (1-\lambda)L_1. \end{aligned}$$
     Ainsi :
     $$\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(C) \iff -1 - (1-\lambda)^2 = 0.$$
     Or, pour tout réel λ on a : $-1 - (1-\lambda)^2 \leq -1$.
     Ainsi : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(C) = \emptyset$.

- **Méthode 2 : par le déterminant.** On a :

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(C) \iff C - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible } &\iff \det(C - \lambda I_2) = 0\\ &\iff 1 + (1-\lambda)^2 = 0.\end{aligned}$$

  Or, pour tout réel λ on a : $1 + (1-\lambda)^2 \geq 1$.
  Ainsi : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(C) = \emptyset$.

En particulier, C n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
Sur $\mathbb{C}$, on obtient de même, pour $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(C) \iff 1 + (1-\lambda)^2 = 0 \iff \lambda = 1 - i \quad \text{ou} \quad \lambda = 1 + i.$$

Ainsi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(C) = \{1 - i, 1 + i\}$.
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.

— On a :

$$X \in E_{1+i}(C) \iff \left\{ \begin{array}{c} x - y = (1+i)x \\ x + y = (1+i)y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} y = -ix \\ x = iy \end{array} \right.$$
$$x = iy$$

  car les deux lignes sont multiples l'une de l'autre.
  Ainsi $E_{1+i}(C) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

— On a :

$$X \in E_{1-i}(C) \iff \left\{ \begin{array}{c} x - y = (1-i)x \\ x + y = (1-i)y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} y = ix \\ x = -iy \end{array} \right.$$
$$x = -iy$$

  car les deux lignes sont multiples l'une de l'autre.
  Ainsi $E_{1-i}(C) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On a donc : $\dim(E_{1-i}(C)) + \dim(E_{1+i}(C)) = 2$ donc la matrice C est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
En posant $P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$ on a :

$$C = PDP^{-1}.$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(E) \iff E - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible } \iff \mathrm{rg}(E - \lambda I_3) < 3.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(E-\lambda I_3) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-\lambda \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) \qquad L_1 \longleftrightarrow L_3 \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & -3-\lambda & -6+2\lambda \\ 0 & 2\lambda & -(1-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix}\right) \qquad \begin{array}{c} L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - (1-\lambda)L_1 \end{array} \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & -3-\lambda & -6+2\lambda \\ 0 & -6 & (\lambda-5)(3-\lambda) \end{pmatrix}\right) \qquad L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_2 \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & -6 & (\lambda-5)(3-\lambda) \\ 0 & -3-\lambda & -6+2\lambda \end{pmatrix}\right) \qquad L_2 \longleftrightarrow L_3 \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-\lambda \\ 0 & -6 & (\lambda-5)(3-\lambda) \\ 0 & 0 & (3-\lambda)(3+2\lambda-\lambda^2) \end{pmatrix}\right) \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{3+\lambda}{6}L_2 \ .
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lambda \in \operatorname{Sp}(E) \iff (3-\lambda)(3+2\lambda-\lambda^2) = 0 \iff (3-\lambda)^2(\lambda+1) = 0 \iff \lambda = 3 \quad \text{ou} \quad \lambda = -1.$$

Donc : $\operatorname{Sp}(E) = \{-1, 3\}$.
Par ailleurs, on constate que $\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) = 2$ pour $\lambda = -1$ ou 3. En particulier, d'après le théorème du rang, pour $\lambda \in \operatorname{Sp}(E)$ on a :

$$\dim(E_\lambda(E)) = \dim(\ker(E-\lambda I_3)) = 3 - 2 = 1.$$

Ainsi la somme des dimensions des sous-espaces propres est :

$$\dim(E_{-1}(E)) + \dim(E_3(E)) = 2 < 3.$$

La matrice E n'est pas diagonalisable.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lambda \in \operatorname{Sp}(B) \iff B - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible } \iff \operatorname{rg}(B - \lambda I_3) < 3.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(B-\lambda I_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \quad L_1 \longleftrightarrow L_3 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 1-(1-\lambda)^2 \end{pmatrix}\right) \quad L_3 \longleftrightarrow L_3-(1-\lambda)L_1 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-(1-\lambda)^2 \end{pmatrix}\right) \quad L_3 \longleftrightarrow L_3+L_2
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(B) \iff 1-\lambda=0 \text{ ou } 1-(1-\lambda)^2=0 \iff \lambda=1 \text{ ou } \lambda=2 \text{ ou } \lambda=0.$$

Donc : $\mathrm{Sp}(B)=\{0,1,2\}$.
La matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ a trois valeurs propres distinctes donc elle diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.
Comme la première et la troisième colonne de B sont identiques, on voit que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker(B)=E_0(B)$. C'est donc une base de $E_0(B)$.
De même, la première et la deuxième colonne de $B-I_3$ sont identiques, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(B-I_3)=E_1(B)$. C'est donc une base de $E_1(B)$.

De même, la première et la dernière colonne de $B-2I_3$ sont opposées, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(B-2I_3)=E_2(B)$. C'est donc une base de $E_2(B)$.
Ainsi, les matrices $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ conviennent.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   - **Méthode 1 : par le rang.** On a :

   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(D) \iff D-\lambda I_2 \text{ n'est pas inversible } \iff \mathrm{rg}(D-\lambda I_2)<2.$$

   Or :

   $$\begin{aligned}
   \mathrm{rg}(D-\lambda I_2) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
   &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 2 \end{pmatrix}\right) \quad L_1 \longleftrightarrow L_2 \\
   &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 0 & 4-(1-\lambda)^2 \end{pmatrix}\right) \quad L_2 \longleftarrow 2L_2-(1-\lambda)L_1.
   \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(D) \Longleftrightarrow 4-(1-\lambda)^2=0 \Longleftrightarrow (1+\lambda)(3-\lambda)=0.$$

Ainsi : $\mathrm{Sp}(D)=\{-1,3\}$.

- **Méthode 2 : par le déterminant.** On a :

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{Sp}(D) \Longleftrightarrow D-\lambda I_2 \text{ n'est pas inversible } &\Longleftrightarrow \det(D-\lambda I_2)=0\\ &\Longleftrightarrow (1-\lambda)^2-4=0\\ &\Longleftrightarrow (3-\lambda)(-1-\lambda)=0.\end{aligned}$$

Ainsi : $\mathrm{Sp}(D)=\{-1,3\}$.

La matrice $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ possèdent deux valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable et chaque sous-espace propre est de dimension 1.

Comme $D+I_2=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$ il est facile de voir que :

$$E_{-1}(D)=\ker(D+I_2)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right).$$

Comme $D-3I_2=\begin{pmatrix}-2&2\\2&-2\end{pmatrix}$ il est facile de voir que :

$$E_3(D)=\ker(D-3I_2)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Ainsi les matrices :

$$P=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix} \quad ; \quad D'=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix}$$

conviennent.

6. On sait qu'un réel λ est valeur propre de F si et seulement si $F-\lambda I_3$ n'est pas inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(F-\lambda I_3)<3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(F-\lambda I_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{pmatrix}\right)\\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&1&1-\lambda\\1-\lambda&1&1\\1&1-\lambda&1\end{pmatrix}\right) \quad L_3 \longleftrightarrow L_1\\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&1&1-\lambda\\0&\lambda&1-(1-\lambda)^2\\0&-\lambda&\lambda\end{pmatrix}\right) \quad L_2 \hookleftarrow L_2-(1-\lambda)L_1 \ ; \ L_3 \hookleftarrow L_3-L_1\\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1&1&1-\lambda\\0&\lambda&1-(1-\lambda)^2\\0&0&\lambda+1-(1-\lambda)^2\end{pmatrix}\right) \quad L_3 \hookleftarrow L_3+L_2.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(F-\lambda I_3)<3 &\iff \lambda+1-(1-\lambda)^2=0 \quad \text{ou} \quad \lambda=0 \\ &\iff 3\lambda-\lambda^2=0 \quad \text{ou} \quad \lambda=0 \\ &\iff \lambda=0 \quad \text{ou} \quad \lambda=3. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Sp}(F)=\{0,3\}$.
On remarque de plus que :

$$\mathrm{rg}(F)=1 \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(F-3I_3)=2$$

donc par le théorème du rang :

$$\dim(E_0(F))=2 \quad \text{et} \quad \dim(E_3(F))=1.$$

La somme des dimensions de sous-espace propre est égale à la dimension de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc F est diagonalisable.
Il est de plus facile de voir que :

$$E_0(F)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) \quad ; \quad E_3(F)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

donc les matrices :

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix} \quad ; \quad D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

conviennent.

Correction de l'exercice 3. Soit $A=\begin{pmatrix}4&-1\\2&1\end{pmatrix}$.

1. Un nombre $\lambda\in\mathbb{C}$ est valeur propre de A si et seulement si le noyau de $A-\lambda I_2$ est non nul ssi (cas 2×2) le déterminant de cette matrice est nul.
   Comme

   $$\det(A-\lambda I_2)=(4-\lambda)(1-\lambda)+2=6-5\lambda+\lambda^2=(\lambda-2)(\lambda-3)$$

   les valeurs propres de A sont les racines de ce trinôme :

   $$\mathrm{Sp}(A)=\{2,3\}.$$

   — **Espace propre associé à** 2. On résout $AX=2X$, ce qui est équivalent, en posant $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, à la seule équation $2x-y=0$. L'espace propre associé à 2 est donc, en posant $u_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

   $$E_2(A)=\ker(A-2I_2)=\mathrm{Vect}(u_1).$$

— **Espace propre associé à** 3. On résout $AX = 3X$, ce qui est équivalent, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, à la seule équation $x - y = 0$. L'espace propre associé à 3 est donc, en posant $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$E_3(A) = \ker(A - 3I_2) = \mathrm{Vect}(u_2).$$

2. Comme la matrice A est d'ordre 2 (de taille 2×2 !) et a deux valeurs propres, elle est diagonalisable.
   Plus précisément, la famille (u_1, u_2) est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, car comporte 2 vecteurs et est libre (regarder le déterminant de cette famille). Il existe donc une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A et A est diagonalisable.
3. En prenant pour P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{U} = (u_1, u_2)$ c'est-à-dire
   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$
   on obtient une matrice inversible telle que
   $$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
   La matrice P est de déterminant -1 et donc
   $$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$
4. Par récurrence (à faire *absolument* au moins une bonne fois dans une épreuve d'écrit portant sur ce sujet), on a
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}.$$
   Après calculs :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = \begin{pmatrix} -2^n + 2 \cdot 3^n & 2^n - 3^n \\ -2 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n & 2 \cdot 2^n - 3^n \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 4.

- La matrice A est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.
- Si $c = 1$ alors $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. Supposons par l'absurde que A est diagonalisable. Alors il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A telles que :
  $$D = P^{-1}AP.$$
  Or, comme 1 est la seule valeur propre de A, on a $D = I_3$. Donc :
  $$I_3 = P^{-1}AP.$$
  En multipliant membre à membre par P à gauche et P^{-1} à droite on obtient :
  $$A = PI_3P^{-1} = I_3.$$
  Ceci est absurde : donc A n'est pas diagonalisable.

- Si $c \neq 1$ alors $\mathrm{Sp}(A) = \{1, c\}$.

— **Déterminons $E_1(A)$.** Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_1(A) \iff AX = X \iff \left\{\begin{array}{rcccccl} x & + & ay & + & z & = & x \\ & & y & + & bz & = & y \\ & & & & cz & = & z \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rccl} ay & + & z & = 0 \\ & & bz & = 0 \\ & & (c-1)z & = 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} ay & = & 0 \\ z & = & 0 \quad \text{car } c \neq 1 \end{array}\right. .$$

∗ Si $a \neq 0$ alors on obtient :

$$X \in E_1(A) \iff AX = X \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{car } a \neq 0.$$

Donc $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

∗ Si $a = 0$ alors on obtient :

$$X \in E_1(A) \iff AX = X \iff z = 0.$$

Donc $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

— **Déterminons $E_c(A)$.** Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in E_c(A) \iff AX = cX \iff \left\{\begin{array}{rcccccl} x & + & ay & + & z & = & cx \\ & & y & + & bz & = & cy \\ & & & & cz & = & cz \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcccccl} (1-c)x & + & ay & + & z & = & 0 \\ & & (1-c)y & + & bz & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{ab+c-1}{(1-c)^2}z \\ y & = & -\dfrac{b}{1-c}z \end{array}\right. \quad \text{car } c \neq 1.$$

Ainsi : $E_c(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \dfrac{ab+c-1}{(1-c)^2} \\ -\dfrac{b}{1-c} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

— **Conclusion.**
Si $a \neq 0$ alors $\dim(E_1(A)) + \dim(E_c(A)) = 2 < 3$ donc A n'est pas diagonalisable.
Si $a = 0$ alors $\dim(E_1(A)) + \dim(E_c(A)) = 3$ donc A est diagonalisable.

- Finalement A est diagonalisable si et seulement si $c \neq 1$ et $a = 0$.

Correction de l'exercice 5.

1. Commençons par B.
   — **Spectre de B.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(B - \lambda I_3) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right) \quad (L_2 \leftrightarrow L_1) \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & (1-\lambda)^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right) \quad (L_2 \to L_2 + (1-\lambda)L_1)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(B - \lambda I_3) < 3 &\iff (1-\lambda)^2 - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 2 - \lambda = 0 \\
&\iff -\lambda(2-\lambda) = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 2 \\
&\iff \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 2.
\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Spec}(B) = \{0, 2\}$.

— Sous-espace propre associé à 0. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$BX = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} x - y &=& 0 \\ -x + y &=& 0 \\ 2z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& y \\ z &=& 0 \end{array}\right.$$

Donc $E_0(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

— Sous-espace propre associé à 2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$BX = 2X \iff \left\{\begin{array}{rcl} x - y &=& 2x \\ -x + y &=& 2y \\ 2z &=& 2z \end{array}\right. \iff x = -y$$

Donc $E_2(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On vérifie facilement que $\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_2(B)$.

— **Diagonalisabilité de B**. Comme $\dim(E_0(B)) + \dim(E_2(B)) = 3$ alors B est diagonalisable.

Passons à A.

— **Spectre de** $\boldsymbol{A}$**.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}-\lambda & 0 & 1\\ 0 & -\lambda & -1\\ 1 & -1 & -1-\lambda\end{pmatrix}\right)\\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & -1 & -1-\lambda\\ 0 & -\lambda & -1\\ -\lambda & 0 & 1\end{pmatrix}\right) \quad (L_3 \leftrightarrow L_1)\\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & -1 & -1-\lambda\\ 0 & -\lambda & -1\\ 0 & -\lambda & 1-\lambda(1+\lambda)\end{pmatrix}\right) \quad (L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1)\\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1 & -1 & -1-\lambda\\ 0 & -\lambda & -1\\ 0 & 0 & 2-\lambda(1+\lambda)\end{pmatrix}\right) \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_2)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) < 3 &\iff \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad 2 - \lambda(1+\lambda) = 0\\
&\iff \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = -2 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Spec}(A) = \{-2, 0, 1\}$.

— Sous-espace propre associé à 0. Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = 0 \iff \left\{\begin{array}{ccc} z & = & 0\\ -z & = & 0\\ x-y-z & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & y\\ z & = & 0\end{array}\right.$$

Donc $E_0(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = E_0(B)$.

— Sous-espace propre associé à -2. Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$BX = 2X \iff \left\{\begin{array}{ccc} z & = & -2x\\ -z & = & -2y\\ x-y-z & = & -2z\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} z & = & -2x\\ y & = & -x\end{array}\right.$$

Donc $E_{-2}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}\right)$.

— Sous-espace propre associé à 1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$BX = X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & x \\ -z & = & y \\ x-y-z & = & z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & -z \end{array} \right.$$

Donc $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

— **Diagonalisabilité de A :** elle a trois valeurs propres distinctes et de dimension 3 donc elle est diagonalisable.

En effet, essayons de trouver une base qui diagonalise A et B.

— On a $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = E_0(B)$.

— $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ et :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}_2(B).$$

— $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}_2(B).$$

— La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $E_2(B)$ de cardinale égal à dimension de $E_2(B)$ donc c'est une base de $E_2(B)$.

Ainsi la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres pour A et B.

En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ on a alors :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. En remarquant que $M(a,b) = aA + bB$ on a :
$$P^{-1}M(a,b)P = a\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&2(b-a)&0\\0&0a+2b&\end{pmatrix}.$$
Les valeurs propres de $M(a,b)$ sont donc $0, 2(b-a)$ et $a+2b$.

Correction de l'exercice 6. On pose
$$M = \begin{pmatrix}0&0&0&a\\0&0&b&0\\0&c&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$
L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si la matrice M l'est et dorénavant, nous ne parlerons que de cette matrice.
Un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de M si et seulement si la matrice $M - \lambda I_4$ n'est pas inversible.
Par l'algorithme de Gauss, les matrices suivantes ont même rang (ce qui permettra de déterminer à quelle condition sur λ la matrice $M - \lambda I_4$ n'est pas inversible) :
$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(M-\lambda I_4) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0&-\lambda\\0&-\lambda&b&0\\0&c&-\lambda&0\\-\lambda&0&0&a\end{pmatrix} \quad (L_1 \leftrightarrow L_4)\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&0&0&-\lambda\\0&-\lambda&b&0\\0&c&-\lambda&0\\0&0&0&a-\lambda^2\end{pmatrix} \quad (L_4 \leftarrow L_4 + \lambda L_1)\\
&= 1 + \operatorname{rg}\begin{pmatrix}-\lambda&b&0\\c&-\lambda&0\\0&0&a-\lambda^2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$
Du fait de la structure de cette dernière matrice, $A - \lambda I_4$ est de rang < 4 si et seulement si $a - \lambda^2 = 0$ ou $\begin{pmatrix}-\lambda&b\\c&-\lambda\end{pmatrix}$ est de rang < 2.
Finalement λ est une valeur propre de M si et seulement si $a - \lambda^2 = 0$ ou $bc - \lambda^2 = 0$. Le spectre de M est donc
$$\operatorname{Spec}(M) = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}, \sqrt{bc}, -\sqrt{bc}\}.$$
Les nombres a, b et c étant tous > 0, ce spectre comporte 4 éléments distincts si $a \neq bc$ auquel cas la matrice M (d'ordre 4) est diagonalisable. Le cas $a = bc$ est singulier en ceci que le spectre de M est réduit à deux éléments
$$\operatorname{Spec}(M) = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}.$$
Pour conclure à la diagonalisabilité de M dans ce cas, déterminons les dimensions des espaces propres. En posant $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$:

$$MX = \sqrt{a}X \iff \left\{\begin{array}{rcl} at & = & \sqrt{a}x \\ bz & = & \sqrt{a}y \\ cy & = & \sqrt{a}z \\ x & = & \sqrt{a}t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} cbz & = & \sqrt{a}cy = az \\ cy & = & \sqrt{a}z \\ x & = & \sqrt{a}t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} cy & = & \sqrt{a}z \\ x & = & \sqrt{a}t \end{array}\right.$$

Ce système est clairement de rang 2, la dimension de l'espace propre associé est donc de 2 (thm du rang). Le même calcul est valable pour la valeur propre $-\sqrt{a}$ et donc, au total, la somme des dimensions des espaces propres vaut 4 et la matrice M est diagonalisable.

Correction de l'exercice 7. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. On a (calcul)
$$A^2 = 3A$$
et donc par une récurrence assez immédiate
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = 3^n A.$$
2. La somme des trois colonnes de A vaut 0, A n'est donc pas inversible et 0 est valeur propre de A.
On $A^2 - 3A = A(A - 3I_3) = 0$ et si $A - 3I_3$ était inversible, on aurait $A = 0$, ce qui est faux. Ainsi $A - 3I_3$ n'est pas inversible et donc 3 est une valeur propre de A.
On a donc et $\{0, 3\} \subset \mathrm{Spec}(A)$.
3. Réciproquement si λ est valeur propre de A, il existe X non nul tel que $AX = \lambda X$ et $A^2X = \lambda^2 X$. D'où :
$$0 = (A^2 - 3A)X = (\lambda^2 - 3\lambda)X$$
et donc $\lambda^2 - 3\lambda = 0$.
Ainsi $\lambda = 0$ ou 3.
On a donc montré par double inclusion $\{0, 3\} = \mathrm{Spec}(A)$.
4. (a) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A)$ si et seulement si $-x + 2y - z = 0$ et $-x - y + 2z = 0$ et donc :
$$E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
(b) $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(A)$ si et seulement si $x + y + z = 0$ et donc
$$E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ diagonalise A au sens où

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$.

1. Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé. Alors :
$$u(x) = \lambda x$$
puis
$$u^2(x) = u(u(x)) = \lambda u(x) = \lambda^2 \quad \text{et} \quad u^3(x) = \lambda^3 x.$$
Or u^3 est l'endomorphisme nul donc :
$$0_E = u^3(x) = \lambda^3 x.$$
Comme $x \neq 0_E$ (c'est un vecteur propre) alors $\lambda^3 = 0$.
On a donc : $\mathrm{Spec}(u) \subset \{0\}$.
Réciproquement, soit $x \in \mathbb{E}$ tel que $u^2(x) \neq 0_E$. Un tel x existe car $u^2 \neq 0$ et est non nul car $u^2(0_E) = 0_E$.
On a alors, compte tenu de $u^3 = 0$:
$$u(u^2(x)) = 0_E = 0 \cdot u^2(x).$$
Ainsi 0 est valeur propre et $u^2(x)$ est un vecteur propre associé.
Finalement $\mathrm{Spec}(u) = \{0\}$.
Supposons u diagonalisable. Alors il existe une base dans laquelle la matrice de u est la matrice diagonale avec des zéros sur la diagonale c'est-à-dire la matrice nulle.
Mais alors u (donc u^2) serait nulle ce qui contredit les hypothèses.
Ainsi u n'est pas diagonalisable.
2. Soit $x \in \mathbb{E}$ tel que $u^2(x) \neq 0_E$. Montrons que $(x, u(x), u^2(x))$ est une base de E.
   — Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{K}^3$ tels que :
   $$(*) \quad \lambda_1 x + \lambda_2 u(x) + \lambda_3 u^2(x) = 0_E.$$
   En appliquant u^2 on obtient par linéarité :
   $$\lambda_1 u^2(x) + \lambda_2 u^3(x) + \lambda_3 u^4(x) = 0_E.$$
   Or u^3 (donc u^4 aussi) est l'endomorphisme nul donc on obtient :
   $$\lambda_1 u^2(x) = \lambda_1 u^2(x) + \lambda_2 u^3(x) + \lambda_3 u^4(x) = 0_E.$$
   Or $u^2(x) \neq 0_E$ donc $\lambda_1 = 0$.
   L'identité $(*)$ devient alors :
   $$\lambda_2 u(x) + \lambda_3 u^2(x) = 0_E.$$
   En appliquant u on obtient alors de même $\lambda_2 = 0$ puis finalement $\lambda_3 = 0$.
   Ainsi la famille $(x, u(x), u^2(x))$ est une famille libre de E.

— La famille $(x, u(x), u^2(x))$ est une famille libre de E de cardinal 3 et $\dim(E) = 3$ donc c'est une base de E.

3. Soit B la base de la question précédente et notons M la matrice de u dans B. On a :

   — $u(x) = u(x)$ donc les coordonnées de $u(x)$ dans B sont $(0, 1, 0)$ et la première colonne de M est $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

   — $u(u(x)) = u^2(x)$ donc les coordonnées de $u(u(x))$ dans B sont $(0, 0, 1)$ et la deuxième colonne de M est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

   — $u(u^2(x)) = u^3(x) = 0$ donc les coordonnées de $u(u^2(x))$ dans B sont $(0, 0, 0)$ et la dernière colonne de M est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Ainsi :
   $$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   .

2 Applications et approfondissements

Correction de l'exercice 9.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.On a :
   $$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff A - \lambda I_4 \text{ n'est pas inversible } \iff \mathrm{rg}(A - \lambda I_4) < 4.$$

Or :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A-\lambda I_4) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right) \quad L_1 \longleftrightarrow L_4 \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\dfrac{\lambda^2}{2} \end{pmatrix}\right) \quad L_4 \longleftarrow L_4 + \frac{\lambda}{2}L_1 \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{4-\lambda^2}{2} \end{pmatrix}\right) \quad L_3 \longleftrightarrow L_2 \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{4-\lambda^2}{2} \end{pmatrix}\right) \quad L_3 \longleftarrow L_3 + \lambda L_2
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \Longleftrightarrow 1-\lambda^2 = 0 \quad \text{ou} \quad 4-\lambda^2=0 \Longleftrightarrow \lambda^2 = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 = 4.$$

Donc : $\operatorname{Sp}(A) = \{-2,-1,1,2\}$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
X \in E_{-2}(A) \Longleftrightarrow AX = -2X &\Longleftrightarrow \begin{cases} 2t = -2x \\ z = -2y \\ y = -2z \\ 2x = -2t \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Ainsi : $E_{-2}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$X \in E_{-1}(A) \Longleftrightarrow AX = -X \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2t & = & -x \\ z & = & -y \\ y & = & -z \\ 2x & = & -t \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -z \\ x & = & 0 \\ t & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ainsi : $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$X \in E_{1}(A) \Longleftrightarrow AX = X \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2t & = & x \\ z & = & y \\ y & = & z \\ 2x & = & t \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & y \\ x & = & 0 \\ t & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ainsi : $E_{1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

- Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$X \in E_{2}(A) \Longleftrightarrow AX = 2X \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2t & = & 2x \\ z & = & 2y \\ y & = & 2z \\ 2x & = & 2t \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & t \\ y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. .$$

Ainsi : $E_{2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2. On pose :

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors on a : $D = P^{-1}AP$.

3. (a) La matrice nulle appartient à C_A donc C_A est un sous-ensemble non vide de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
Soit $(M, N) \in C_A \times C_A$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, comme M et N commutent avec A on a :

$$A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN = MA + \lambda NA = (M + \lambda N)A.$$

Ainsi, $M + \lambda N$ commute avec A : $M + \lambda N \in C_A$.
D'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels, C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

(b) Notons que : $M = PNP^{-1}$. On a donc :

$$\begin{aligned} M \in C_A \iff AM = MA &\iff APNP^{-1} = PNP^{-1}A \\ &\iff P^{-1}APNP^{-1} = NP^{-1}A \quad \text{en multipliant par } P^{-1} \\ &\iff P^{-1}APN = NP^{-1}AP \quad \text{en multipliant par } P \\ &\iff DN = ND \quad \text{car } D = P^{-1}AP \\ &\iff N \in C_D. \end{aligned}$$

(c) Soit $N = (n_{i,j}) \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Un calcul donne :

$$DN = \begin{pmatrix} -2n_{1,1} & -2n_{1,2} & -2n_{1,3} & -2n_{1,4} \\ -n_{2,1} & -n_{2,2} & -n_{2,3} & -n_{2,4} \\ n_{3,1} & n_{3,2} & n_{3,3} & n_{3,4} \\ 2n_{4,1} & 2n_{4,2} & 2n_{4,3} & 2n_{4,4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad ND = \begin{pmatrix} -2n_{1,1} & -n_{1,2} & n_{1,3} & 2n_{1,4} \\ -2n_{2,1} & -n_{2,2} & n_{2,3} & 2n_{2,4} \\ -2n_{3,1} & -n_{3,2} & n_{3,3} & 2n_{3,4} \\ -2n_{4,1} & -n_{4,2} & n_{4,3} & 2n_{4,4} \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} N \in C_D &\iff DN = ND \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2n_{1,1} & = & -2n_{1,1} \\ -2n_{1,2} & = & -n_{1,2} \\ -2n_{1,3} & = & n_{1,3} \\ -2n_{1,4} & = & 2n_{1,4} \\ -n_{2,1} & = & -2n_{2,1} \\ -n_{2,2} & = & -n_{2,2} \\ -n_{2,3} & = & n_{2,3} \\ -n_{2,4} & = & 2n_{2,4} \\ n_{3,1} & = & -2n_{3,1} \\ n_{3,2} & = & -n_{3,2} \\ n_{3,3} & = & n_{3,3} \\ n_{3,4} & = & 2n_{3,4} \\ 2n_{4,1} & = & -2n_{4,1} \\ 2n_{4,2} & = & -n_{4,2} \\ 2n_{4,3} & = & n_{4,3} \\ 2n_{4,4} & = & 2n_{4,4} \end{array} \right. \\ &\iff n_{i,j} = 0 \text{ pour tout } i \neq j. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } C_D = \left\{ \begin{pmatrix} n_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{4,4} \end{pmatrix} \ , \ (n_{1,1}, n_{2,2}, n_{3,3}, n_{4,4}) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

(d) D'après les questions 5 et 6, on a :

$$C_A = \left\{ P \begin{pmatrix} n_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{4,4} \end{pmatrix} P^{-1} \ , \ (n_{1,1}, n_{2,2}, n_{3,3}, n_{4,4}) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Or, $P^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc :

$$C_A = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} n_{1,1} + n_{4,4} & 0 & 0 & -n_{1,1} + n_{4,4} \\ 0 & n_{2,2} + n_{3,3} & -n_{2,2} + n_{3,3} & 0 \\ 0 & -n_{2,2} + n_{3,3} & n_{2,2} + n_{3,3} & 0 \\ -n_{1,1} + n_{4,4} & 0 & 0 & n_{1,1} + n_{4,4} \end{pmatrix} \ , \ (n_{1,1}, \ldots, n_{4,4}) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Or l'application :

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ &(n_{1,1}, \ldots, n_{4,4}) \longmapsto \frac{1}{2} (n_{1,1} + n_{4,4}, -n_{1,1} + n_{4,4}, n_{2,2} + n_{3,3}, -n_{2,2} + n_{3,3}) \end{aligned}$$

est une bijection de $\mathbb{R}^4$. Donc, en posant

$$(a, b, c, d) = \frac{1}{2} (n_{1,1} + n_{4,4}, -n_{1,1} + n_{4,4}, n_{2,2} + n_{3,3}, -n_{2,2} + n_{3,3})$$

on obtient :

$$C_A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \ , \ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

(e) D'après la question précédente, la famille :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

est une famille génératrice de C_A. De plus, pour tout $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ on a :

$$a\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$$

$$\iff \begin{pmatrix}a&0&0&b\\0&c&d&0\\0&d&c&0\\b&0&0&a\end{pmatrix}=0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$$

$$\iff a=b=c=d=0.$$

Ainsi cette famille est aussi libre.
Finalement, la famille suivante est une base de C_A :

$$\left(\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right).$$

En particulier, $\dim(C_A)=4$.

Correction de l'exercice 10. On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y_1' &= \dfrac{2y_1-y_2-y_3}{3}\\ y_2' &= \dfrac{-y_1+2y_2-y_3}{3}\\ y_3' &= \dfrac{-y_1-y_2+2y_3}{3}\end{cases}$$

1. En posant $A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$ alors on a bien :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ Y'(t)=AY(t)\iff\begin{cases} y_1' &= \dfrac{2y_1-y_2-y_3}{3}\\ y_2' &= \dfrac{-y_1+2y_2-y_3}{3}\\ y_3' &= \dfrac{-y_1-y_2+2y_3}{3}\end{cases}$$

2. (a) On trouve :

$$\mathrm{Sp}(A)=\{0,1\}\quad;\quad E_1(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)\quad;\quad E_0(A)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

En particulier, la somme des dimensions des sous-espaces propres de A valant 3, A est diagonalisable.

(b) En posant :

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

on a $A=PDP^{-1}$.

3. (a) On sait que (y_1, y_2, y_3) est solution du système si et seulement si pour tout réel t, $Y'(t) = AY(t)$. Or, pour tout réel t :

$$Y'(t) = AY(t) \iff Y'(t) = PDP^{-1}Y(t) \iff P^{-1}Y'(t) = DP^{-1}Y(t) = DX(t).$$

En effet, il suffit de remarquer que par linéarité de la dérivation on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, P^{-1}Y'(t) = (P^{-1}Y)'(t) = X'(t).$$

Ainsi (y_1, y_2, y_3) est solution du système si et seulement si pour tout réel t, $X'(t) = DX(t)$.

(b) Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X'(t) = DX(t) \iff \forall t \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & 0 \\ x_2'(t) & = & x_2(t) \\ x_3'(t) & = & x_3(t) \end{array} \right.$$

$$\iff \exists (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3\ \forall t \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{lcl} x_1(t) & = & c_1 \\ x_2(t) & = & c_2 e^t \\ x_3(t) & = & c_3 e^t. \end{array} \right.$$

(c) D'après les questions précédentes, (y_1, y_2, y_3) est solution du système initial si et seulement si il existe $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout réel t :

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 e^t \\ c_3 e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 e^t + c_3 e^t \\ c_1 - c_3 e^t \\ c_1 - c_2 e^t \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 11.

1. $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} 3a_n + 4b_n + c_n \\ -4a_n - 5b_n + c_n \\ -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix} X_n.$$

Ainsi la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$ convient.

3. On vérifie que $\mathrm{Spec}(C) = \{-1, 0, 1\}$ et que :

$$E_0(C) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad ; \quad E_{-1}(C) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \quad ; \quad E_1(C) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right).$$

C'est une matrice 3×3 avec 3 valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable.

4. Par récurrence montrons que $\mathcal{P}_n$:« $X_n = C^n X_0$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - Initialisation : $C^0 = I_3$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait que $X_n = C^n X_0$ donc :

     $$X_{n+1} = CX_n = CC^n X_0 = C^{n+1} X_0.$$

     Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - Conclusion : par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $X_n = C^n X_0$.

5. En posant : $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ d'après la question 3 on a :

   $$C = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

   Par récurrence montrons que $\mathcal{P}_n$:

   $$C^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

   est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   - Initialisation : c'est la diagonalisation de C.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

     $$\begin{aligned} C^{n+1} = C^n C &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

     et on en déduit donc que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - Conclusion : par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Ainsi pour tout entier naturel n non nul :

   $$X_n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} X_0$$

Il ne reste plus qu'à calculer P^{-1} pour déterminer X_n. Un calcul donne :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} X_n &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} X_0 \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 \\ (-1)^n \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - 2(-1)^n \\ -1 + 3(-1)^n \\ -2 + 4(-1)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} a_n &=& 1 - 2(-1)^n \\ b_n &=& -1 + 3(-1)^n \\ c_n &=& -2 + 4(-1)^n \end{array} \right.$$

Correction de l'exercice 12.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = j])_{j \in \{1,\dots,5}$, on a pour tout $i \in \{1, \dots 5\}$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i) = \sum_{j=1}^{5} \mathbb{P}_{[X_n = j]}(X_{n+1} = i)\mathbb{P}(X_n = j).$$

Compte tenu du comportement de la souris on trouve :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = 1) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 2) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 4) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 2) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 3) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = 3) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 4) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 4) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 5) &= \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 4) + \mathbb{P}(X_n = 5) \end{aligned}$$

D'où :

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} V_n.$$

(b) C'est une récurrence immédiate (à savoir rédiger en détail !).

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(M-\lambda I_5) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1-\lambda & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1-\lambda & 1/3 & 0 \\ -\lambda & 1/2 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad (L_1 \leftrightarrow L_4) \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1/2 & 1-\lambda & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/3-2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2\lambda L_1 \end{matrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/3-2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1-\lambda & 1/3 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_4
\end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(M-\lambda I_5) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/3-2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1-\lambda & 1/3 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/3-2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(5/3-4\lambda^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_3 \to L_3 - L_2 \\ L_4 \to L_4 + 2\lambda L_2 \end{matrix}
\end{aligned}$$

Finalement, en inversant les deux dernière lignes puis les deux dernières colonnes :

$$\mathrm{rg}(M-\lambda I_5) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/3-2\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 & 2\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda(5/3-4\lambda^2) \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\mathrm{rg}(M-\lambda I_5) < 5 \Longleftrightarrow 1-\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda(5/3-4\lambda^2)=0.$$

Donc $\mathrm{Spec}(M) = \{0, 1, \sqrt{\frac{5}{12}}, -\sqrt{\frac{5}{12}}\}$.

De plus pour $\lambda \in \{0, \sqrt{\frac{5}{12}}, -\sqrt{\frac{5}{12}}\}$, le rang de $M-\lambda I_5$ est 4 donc d'après le théorème du rang les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Pour $\lambda = 1$, le rang de $M-\lambda I_5$ est 3 donc d'après le théorème du rang le sous-espace propre est de dimension 2.

En particulier, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à 5 donc M est diagonalisable et semblable à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{5}{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{5}{12}} \end{pmatrix}.$$

(d) — Pour la valeur propre 1. Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$MX = X \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 1/2b + 1/3d & = & a \\ 1/2a & = & b \\ 1/2b + c + 1/3d & = & c \\ 1/2a & = & d \\ 1/3d + e & = & e \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & 0 \\ a & = & 0 \\ d & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc $E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

— De même, on a :

$$E_0(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad ; \quad E_{\sqrt{\frac{5}{12}}}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 5-2\sqrt{15} \\ -6+\sqrt{15} \\ 5 \\ -6+\sqrt{15} \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

et

$$E_{\sqrt{-\frac{5}{12}}}(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 5+2\sqrt{15} \\ -6-\sqrt{15} \\ 5 \\ -6-\sqrt{15} \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

(e) Cela revient à trouver pour tout $i \in \{1, \ldots, 5\}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = i)$ sachant que $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On peut calculer explicitement P puis P^{-1} et faire le calcul :

$$V_n = PD^nP^{-1}V_0$$

mais c'est fastidieux.
Sinon, on peut être plus astucieux.
On note $C_1, C_2 \in E_1(M)$, $C_3 \in E_0(M)$, $C_4 \in E_{\sqrt{\frac{5}{12}}}(M)$ et $C_5 \in E_{-\sqrt{\frac{5}{12}}}(M)$ les colonnes de P déterminées à la question précédente.
On note également $(e_1, \ldots, e_5)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$.
On a alors : $Pe_i = C_i$ donc $P^{-1}C_i = e_i$. On a ainsi :

$$PD^nP^{-1}C_i = PD^ne_i = Pd_{i,i}e_i = d_{i,i}Pe_i = d_{i,i}C_i.$$

En notant (a, b, c, d, e) les coordonnées de V_0 dans la base $(C_1, \ldots, C_5)$ on a donc :

$$(*) \quad V_n = aC_1 + bC_2 + d\sqrt{\frac{5}{12}}^{\,n} C_4 + e\left(-\sqrt{\frac{5}{12}}\right)^n C_5.$$

Il suffit donc de déterminer les réels $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ tels que :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = aC_1 + bC_2 + cC_3 + dC_4 + eC_5.$$

En résolvant le système on trouve :

$$a = \frac{5}{7} \quad ; \quad b = \frac{2}{7} \quad ; \quad c = 0 \quad ; \quad d = \frac{-5-2\sqrt{15}}{35} \quad ; \quad e = \frac{-5+2\sqrt{15}}{35}.$$

En passant à la limite dans $(*)$ on trouve :

$$\begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 3) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 4) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 5) \end{pmatrix} = \frac{5}{7}C_1 + \frac{2}{7}C_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Malheureusement, après une grande durée, le plus probable est qu'elle finisse mangée.

2. Soient $n \geq 0$ et $r \geq 1$ deux entiers.
   Soient $(i_0, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, 5\}^{n+1}$ et $(j_{n+1}, \ldots, j_{n+r}) \in \{1, \ldots, 5\}^r$ tels que :

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) > 0.$$

   On sait que

$$\mathbb{P}_{[X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n]}(X_{n+1} = j_{n+1}, \ldots, X_{n+r} = j_{n+r}) = \frac{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_{n+r} = j_{n+r})}{\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n)}$$

   Or par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_{n+r} = j_{n+r}) \\ &\quad = \mathbb{P}(X_0 = i_0)\mathbb{P}_{[X_0=i_0]}(X_1 = i_1) \times \cdots \times \mathbb{P}_{[X_0=i_0,\ldots,X_{n+r-1}=j_{n+r-1}]}(X_{n+r} = j_{n+r}) \\ &\quad = \mathbb{P}(X_0 = i_0)\mathbb{P}_{[X_0=i_0]}(X_1 = i_1) \times \cdots \times \mathbb{P}_{[X_{n+r-1}=j_{n+r-1}]}(X_{n+r} = j_{n+r}) \end{aligned}$$

   la dernière égalité provenant de la description du comportement de la souris : sa position à un instant donné ne dépend que de sa position immédiatement avant et pas de toute sa trajectoire. Or, par construction de la matrice M, pour tout $k \in \mathbb{N}$ la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X_k=i]}(X_{k+1} = j)$ de passer de la pièce i à la pièce j est le coefficient (j, i) de M. Ainsi :

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_{n+r} = j_{n+r}) = \mathbb{P}(X_0 = i_0) m_{i_0,j_1} \ldots m_{j_{n+r-1},j_{n+r}}.$$

   De même

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_0 = i_0) m_{i_0,j_1} \ldots m_{i_{n-1},i_n}.$$

   En faisant le quotient, on obtient alors le résultat voulu.

3. On note T_5 la variable aléatoire définie par :

$$T_5 = \inf\{n \geq 0 \ ; \ X_n = 5\}.$$

   La variable aléatoire T_5 représente le temps que la souris met pour atteindre le fromage (la première fois).
   Pour tout $i \in E$ on note

$$u_i = P_{[X_0=i]}(T_5 < +\infty).$$

   Ainsi u_i est la probabilité que la souris atteigne le fromage en partant de la pièce n°i.

   (a) Partant de la pièce 5, la souris est déjà au fromage donc $u_5 = 1$.
       Partant de la pièce 3, la souris se fait manger donc elle n'atteindra jamais le fromage $u_3 = 0$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
       L'événement $[T_5 = n]$ est réalisé si la souris atteint la pièce 5 pour la première fois à l'instant n c'est-à-dire si sa trajectoire n'a pas rencontrée la pièce 5 entre les instants 0 et $n - 1$ et atteint la pièce 5 en n :

$$[T_5 = n] = \bigcup_{(x_0,\ldots,x_{n-1}) \in \{1,2,3,4\}^n} [X_0 = x_0, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = 5].$$

(c) Soit $n \geq 2$ et $(i,j) \in E^2$. D'après la question 2 on a d'une part, pour tout $(x_0,\dots,x_{n-1}) \in \{1,2,3,4\}^n$:

$$\mathbb{P}_{[X_0=i,X_1=j]}([X_0=x_0,\dots,X_{n-1}=x_{n-1},X_n=5]) = \begin{cases} m_{j,x_2}\dots m_{x_{n-1},5} & \text{si } (x_0,x_1)=(i,j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc avec la question précédente :

$$\mathbb{P}_{[X_0=i,X_1=j]}(T_5=n) = \sum_{(x_2\dots,x_{n-1})\in\{1,2,3,4\}^{n-2}} m_{j,x_2}\dots m_{x_{n-1},5}.$$

D'autre part, pour les mêmes raisons on a pour tout $(x_0,x_2,\dots,x_{n-1}) \in \{1,2,3,4\}^{n-1}$:

$$\mathbb{P}_{[X_0=j]}([X_0=x_0,X_1=x_2,\dots,X_{n-2}=x_{n-1},X_{n-1}=5]) = \begin{cases} m_{j,x_2}\dots m_{x_{n-1},5} & \text{si } x_0=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc :

$$\mathbb{P}_{[X_0=j]}(T_5=n-1) = \sum_{(x_2\dots,x_{n-1})\in\{1,2,3,4\}^{n-2}} m_{j,x_2}\dots m_{x_{n-1},5}.$$

et ainsi :

$$P_{[X_0=i,X_1=j]}(T_5=n) = P_{[X_0=j]}(T_5=n-1).$$

Une façon moins formelle de dire les choses : sachant que la souris commence par visiter la pièce i et j, pour qu'elle atteigne le fromage en n coups tout se passe comme si, partant de la pièce j elle l'atteint en $n-1$ coups.

(d) Pour $i \notin \{3,5\}$, on applique la formule des probabilités totales avec le SCE $([X_1=j])_{j=1,\dots,5}$:

$$u_i = \sum_{j=1}^{5} \mathbb{P}_{[X_0=i,X_1=j]}(T_5<+\infty)\mathbb{P}_{[X_0=i]}(X_1=j)$$

(en ne tenant compte dans la somme que des j pour lesquels $\mathbb{P}(X_0=i,X_1=j)\neq 0$). Comme $i\notin\{3,5\}$, avec les questions précédentes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[X_0=i,X_1=j]}(T_5<+\infty) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}_{[X_0=i,X_1=j]}(T_5=n)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}_{[X_0=j]}(T_5=n-1) = \mathbb{P}_{[X_0=j]}(T_5<+\infty)\end{aligned}$$

et on obtient donc :

$$u_i = \sum_{j=1}^{5} u_j\mathbb{P}_{[X_0=i]}(X_1=j).$$

D'où le système :

$$\begin{cases} u_1 &= & \frac{1}{2}u_2+\frac{1}{2}u_4 \\ u_2 &= & \frac{1}{2}u_1+\frac{1}{2}u_3 \\ u_3 &= & 0 \\ u_4 &= & \frac{1}{3}u_1+\frac{1}{3}u_3+\frac{1}{3}u_5 \\ u_5 &= & 1. \end{cases}$$

(e) On trouve $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = \left(\frac{2}{7}, \frac{1}{7}, 0, \frac{3}{7}, 1\right)$.

Correction de l'exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit Φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Phi(P) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)}.$$

1. Montrons que Φ est linéaire : soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\Phi(P+\lambda Q) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (P+\lambda Q)^{(k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (P^{(k)} + \lambda Q^{(k)}) \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} + \lambda \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} Q^{(k)} \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= \Phi(P) + \lambda \Phi(Q).
\end{aligned}$$

   Ainsi Φ est linéaire.
   De plus, on sait que : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg(P') \leq \deg(P) - 1$ donc on en déduit que :

$$\deg(\Phi(P)) = \deg(P) \leq n.$$

   Ainsi $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$.
   Finalement, Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. On note Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Delta(P) = P'$.

   (a) On a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\Delta(X^k) = kX^{k-1}$ et $\Delta(1) = 0$ donc :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) En remarquant que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$: $\Delta^k(P) = P^k$ on déduit :

$$\Phi = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k.$$

   Or comme Δ et $\mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ commutent, on a l'identité de Newton (à prouver par récurrence !) :

$$\Phi = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k = (\Delta + \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})^n.$$

   Ainsi :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\Phi) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}((\Delta + \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]})^n) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}((\Delta + \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}))^n = (D + I_{n+1})^n.$$

3. **Python**

   (a) Écrire une fonction Python qui prend un entier $n \in \mathbb{N}^*$ en argument et renvoie la matrice D sous forme de tableau `numpy`.

```
def D(n):
        M = np.zeros([n+1,n+1])
        for i in range(n+1):
                M[i,i+1]= i+1
        return M
```

   (b) Même question avec A.

```
def A(n):
        I = np.eyes(n+1)
        M = D(n)+I
        MatPhi = I
        for i in range(n):
                MatPhi = np.dot(M,MatPhi)
        return A
```

   (c) Les coordonnées de $\Phi(P)$ dans la base canonique s'obtiennent en faisant le produit de A et de la colonne des coordonnées de P dans la base canonique d'où :

```
def Phi_coordo(n,P):
        MatPhi = A(n)
        return np.transpose( np.dot(MatPhi,np.transpose(P)))
```

4. On sait que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}^n .$$

   En particulier, A est triangulaire avec ses coefficients diagonaux égaux à 1 donc A est inversible.

   Comme c'est la matrice de Φ dans la base canonique, Φ est bijectif.

5. Pour les mêmes raisons, on en déduit que les valeurs propres de Φ sont les coefficients diagonaux de A c'est-à-dire : $\mathrm{Spec}(\Phi) = \{1\}$.

   Soit $P \in E_1(\Phi)$ non nul.

   Alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} = P$ c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} = 0$.

   En notant $p = \deg(P)$ on a donc, si $p \geq 1$:

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{p} \binom{n}{k} P^{(k)} = 0$$

avec $P', \dots, P^{(p)}$ non nuls et de degrés échelonnés donc libre. C'est absurde car $(*)$ signifie qu'elle est liée.
Par conséquent $p = 0$: $E_1(\Phi) \subset \mathbb{R}_0[X]$. L'inclusion réciproque est immédiate si bien que $E_1(\Phi) = \mathbb{R}_0[X]$.

6. La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut $1 < \dim(\mathbb{R}_n[X])$ donc Φ n'est pas diagonalisable.

Correction de l'exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons la matrice $n \times n$:

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour $1 \leq \ell \leq n$, on pose $\theta_\ell = \dfrac{\ell\pi}{n+1}$ et on note :

$$v_\ell = (\sin(k\theta_\ell))_{1 \leq k \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}).$$

1. (a) Pour $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &\sin(x-y) + 2\sin(x) + \sin(x+y) \\ &\quad = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x) + 2\sin(x) + \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \\ &\quad = 2(1+\cos(y))\sin x. \end{aligned}$$

(b) Soit $1 \leq \ell \leq n$. Posons $w_\ell = \Delta_n v_\ell$ et notons

$$w_\ell = \begin{pmatrix} w_{1,\ell} \\ \vdots \\ w_{n,\ell} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_\ell = \begin{pmatrix} v_{1,\ell} \\ \vdots \\ v_{n,\ell} \end{pmatrix}.$$

On a alors, pour $2 \leq k \leq n-1$, en faisant le produit matriciel :

$$w_{k,\ell} = v_{(k-1),\ell} + 2v_{k,\ell} + v_{(k+1),\ell}$$

et, pour $k = 1$,

$$w_{k,\ell} = 2v_{k,\ell} + v_{(k+1),\ell},$$

et enfin pour $k = n$,

$$w_{k\ell} = v_{(k-1),\ell} + 2v_{k,\ell}.$$

— **Cas où** $2 \leq k \leq n-1$ **:** par la question précédente avec $x = k\theta_\ell$ et $y = \theta_\ell$ on a, puisque $v_{k,\ell} = \sin(k\theta_\ell)$:

$$\begin{aligned} w_{k,\ell} &= v_{(k-1),\ell} + 2v_{k,\ell} + v_{(k+1),\ell} \\ &= 2(1+\cos(\theta_\ell))\sin(k\theta_\ell) = 2(1+\cos(\theta_\ell))v_{k,\ell} = \lambda_\ell v_{k\ell} \end{aligned}$$

où $\lambda_\ell = 2(1+\cos(\theta_\ell))$.

Notons que nous n'avons pas utilisé le fait que $\theta_\ell = \dfrac{\ell\pi}{n+1}$ dans ce calcul.

— **Cas où** $k = 1$ **:** alors $k - 1 = 0$ et en posant $v_{0,\ell} = 0 = \sin((k-1)\theta_\ell)$, on a :

$$\begin{aligned} w_{k,\ell} &= \underbrace{v_{(k-1),\ell}}_{=0} + 2v_{k,\ell} + v_{(k+1),\ell} \\ &= 2(1+\cos(\theta_\ell))\sin(k\theta_\ell) = 2(1+\cos(\theta_\ell))v_{k\ell} = \lambda_\ell v_{k\ell} \end{aligned}$$

où $\lambda_\ell = 2(1+\cos(\theta_\ell))$.

— **Cas où** $k = n$ **:** alors $k + 1 = n + 1$ et en posant

$$v_{(n+1),\ell} = 0 = \sin(\ell\pi) = \sin((k+1)\theta_\ell)$$

(on se sert de la valeur exacte de θ_ℓ uniquement à ce moment, il ne faut pas le louper), on a :

$$\begin{aligned} w_{k,\ell} &= v_{(k-1),\ell} + 2v_{k,\ell} + \underbrace{v_{(k+1),\ell}}_{=0} \\ &= 2(1+\cos(\theta_\ell))\sin(k\theta_\ell) = 2(1+\cos(\theta_\ell))v_{k,\ell} = \lambda_\ell v_{k,\ell} \end{aligned}$$

où $\lambda_\ell = 2(1+\cos(\theta_\ell))$.

On a donc démontré :

$$\Delta_n v_\ell = w_\ell = \lambda_\ell v_\ell$$

où $\lambda_\ell = 2(1+\cos(\theta_\ell))$.

Comme v_ℓ est non nul, cela montre que $\lambda_\ell = 2(1+\cos(\theta_\ell))$ est valeur propre de Δ_n et v_ℓ en est un vecteur propre associé.

2. Les n réels θ_ℓ sont des réels distincts de l'intervalle $[0,\pi]$, intervalle sur lequel la fonction cos est injective. Les $\lambda_\ell, \ell \in$
$llbracket 1, n\rrbracket$ sont donc deux à deux distincts et nous avons trouvé n valeurs propres distinctes de la matrice Δ_n, de taille $n \times n$.
   Cette matrice est donc diagonalisable[1].
3. La matrice Δ_n est inversible car 0 n'est pas valeur propre. En effet, pour $\ell \in [\![1,n]\!]$:

$$\lambda_\ell = 2(1+\cos(\theta_\ell)) = 4\cos^2\frac{\theta_\ell}{2}$$

   Comme $\dfrac{\theta_\ell}{2} = \dfrac{\ell}{n+1}\dfrac{\pi}{2} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\lambda_\ell \neq 0$.

1. On verra bientôt que cela était prévisible car Δ_n est symétrique réelle.