Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

Méthodes de calcul et raisonnement

2h

L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1 - D'après Agro-Véto 2024

Partie 1. Résultats préliminaires.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer : $\forall j \in [\![0, p]\!]$, $\dfrac{1}{1+j}\dbinom{p}{j} = \dfrac{1}{p+1}\dbinom{p+1}{j+1}$.

(b) Montrer : $\forall j \in [\![0, p-1]\!]$, $\dbinom{p+1}{j+1} = \dbinom{p}{j+1} + \dbinom{p}{j}$.

2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Donner, sans justification, une fonction de densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance de X en fonction de λ.

3. **(a)** Démontrer que, pour tout entier $i > 1$, on a :

$$\int_i^{i+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{i} \leq \int_{i-1}^{i} \frac{1}{t}dt.$$

(b) Justifier l'équivalent : $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

(c) En déduire un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie 2. Quelques résultats autour de la loi exponentielle

On se donne un entier naturel $n > 0$, un réel strictement positif λ et une famille de n variables aléatoires notées X_1,…,X_n indépendantes et identiquement distribuées [1] selon la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On définit $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. C'est-à-dire de même loi.

4. Calculer $P(X_{(1)} > x)$ pour tout réel x positif et en déduire que la variable $X_{(1)}$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

5. Prouver que $X_{(n)}$ est une variable aléatoire de densité :

$$x \longmapsto n\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}1_{\mathbb{R}^+}(x)$$

où $1_{\mathbb{R}^+}$ désigne la fonction indicatrice de $\mathbb{R}^+$ définie par $1_{\mathbb{R}^+}(x) = 1$ si $x \in \mathbb{R}^+$ et $1_{\mathbb{R}^+}(x) = 0$ sinon.

6. En déduire que :

$$E(X_{(n)}) = n\lambda \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}(-1)^j \int_0^{+\infty} xe^{-(1+j)\lambda x}dx$$

puis, en utilisant les résultats de la partie 1, que :

$$E(X_{(n)}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j+1}\frac{(-1)^j}{j+1}.$$

7. Dans cette question, on veut prouver que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j+1}\frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}.$$

- **(a)** Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}(-1)^k$.
- **(b)** En utilisant les résultats de la partie 1, prouver le résultat souhaité par récurrence.

8. En déduire un équivalent de $E(X_{(n)})$.

9. On définit la suite $u = (\lambda E(X_{(n)}) - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

- **(a)** Déterminer un équivalent de $u_{n+1}-u_n$ et en déduire que la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est convergente.
- **(b)** En déduire que la suite u est convergente. On ne cherchera pas à calculer sa limite.

Partie 3. Loi de Gumbel

On reprend les notations de la partie précédente et on rappelle que la variable X_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ. On définit la fonction f par :

$$f : x \longmapsto \lambda\exp(-x)\exp(-\lambda\exp(-x)).$$

10. Justifier que la fonction f est bien une densité de probabilité.
On appellera cette loi la *la loi de Gumbel de paramètre* λ.
Indication : on pourra utiliser le changement de variable $y = \exp(-x)$.

11. Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln(X_1)$ suit une loi de Gumbel dont on précisera le paramètre.

12. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier la limite suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x).$$

13. Dans cette question, on prend $\lambda = 1$.

(a) Déterminer la fonction de répartition F_n de $X_{(n)} - \ln(n)$.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = F_Y(x)$$

où F_Y est la fonction de répartition de Y.

Problème 2 - D'après Agro-Véto 2023

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On s'intéresse dans ce problème à l'évolution d'une population dont les individus peuvent suivre n différentes stratégies de survie (numérotées de 1 à n) en utilisant une modélisation en temps continu.

Pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note x_i la proportion des individus qui adoptent la stratégie numéro i et $m_{i,j}$ représente l'avantage sélectif qu'un individu qui adopte la stratégie i retire d'une interaction avec un autre individu qui adopte la stratégie j.

Ainsi, le taux de croissance de x_i à un temps t s'écrit comme la différence entre l'avantage sélectif tiré de son interaction avec les autres $\left(\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j(t)\right)$ et l'avantage moyen des individus de toute la population $\left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{j,k} x_j(t) x_k(t)\right)$.

On se donne donc une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on note $m_{i,j}$ le coefficient situé à la i-ième ligne et la j-ième colonne.
On cherche à déterminer n fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$, notées $x_1, \dots, x_n$ telles que pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$ on ait :

$$(1) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad x_i'(t) = x_i(t) \left(\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j(t) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{j,k} x_j(t) x_k(t)\right).$$

Partie 1. Quelques résultats utiles

Soit a une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E_1) \quad : \quad y'(t) = a(t) y(t).$$

1. Donner sans justification les solutions de l'équation différentielle (E_1).

2. En déduire que si f est une solution de (E_1) s'annulant sur I alors f est la fonction nulle sur l'intervalle I.

Soit b une fonction continue sur $\mathbb{R}$, C une constante réelle et g une solution sur un intervalle I de l'équation différentielle :

$$(E_2) \quad : \quad y'(t) = b(y(t))(y(t) - C).$$

3. Montrer que $g - C$ est solution sur I de :

$$(E_3) \quad : \quad y'(t) = b(g(t))y(t).$$

4. En déduire que s'il existe $t_0 \in I$ tel que $g(t_0) = C$ alors g est constante sur I.

Partie 2. Étude d'un exemple

On étudier dans cette partie, le système (1) lorsque $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On s'intéresse donc aux triplets de fonctions (x_1, x_2, x_3) qui sont solutions sur $\mathbb{R}^+$ du système :

$$(2) \quad \begin{cases} x_1' &= x_1(x_2 - x_3) \\ x_2' &= x_2(x_3 - x_1) \\ x_3' &= x_3(x_1 - x_2) \end{cases} \quad \text{et} \quad x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) = 1.$$

5. Déterminer le (ou les) triplet(s) de réels (C_1, C_2, C_3) tel(s) qu'il existe une solution de (2) constante égale à (C_1, C_2, C_3).

6. On s'intéresse à une petite perturbation autour d'une solution constante identifiée à la question précédente, ce qui conduit à étudier les triplets de fonctions (h_1, h_2, h_3) vérifiant :

$$(3) \quad \begin{cases} h_1' &= \frac{1}{3}(h_2 - h_3) \\ h_2' &= \frac{1}{3}(h_3 - h_1) \\ h_3' &= \frac{1}{3}(h_1 - h_2) \end{cases} \quad \text{et} \quad h_1(0) + h_2(0) + h_3(0) = 0.$$

(a) Déterminer les valeurs propres complexes de la matrice M et une base de chaque sous-espace propre.

(b) En déduire une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ telles que :

$$M = PDP^{-1}.$$

On fera en sorte que la première ligne de P ne soit constituée que de 1.

On admet que la diagonalisation de la matrice M permet ensuite la résolution de (3) mais ce n'est pas l'objet de la suite.

Partie 3. Étude d'un deuxième exemple

On étudie maintenant le cas où $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans, ce cas on peut montrer que x_1 est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(4) \quad y' = y(y-1)(4y-3).$$

7. Déterminer trois réels A,B et C tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0, 3/4, 1\}, \quad \frac{1}{x(x-1)(4x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{4x-3}.$$

8. En déduire l'ensemble des primitives de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{x(x-1)(4x-3)}$ sur l'intervalle $]0, 3/4[$.

9. Prouver que si $x_1(0) \in]0, 3/4[$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x_1(t) \in]0, 3/4[$.
Indication : on pourra utiliser les résultats de la partie 1.

On suppose dans toute la suite que $x_1(0) \in]0, 3/4[$.

10. Montrer qu'il existe une constante $D \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ on ait :

$$t + D = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{x_1(t)(1 - x_1(t))^3}{(x_1(t) - 3/4)^4}\right).$$

11. En déduire que $\lim\limits_{t \to +\infty} x_1(t) = 3/4$.