Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

Méthodes de calcul et raisonnement

2h

L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1 - D'après Agro-Véto 2024

Partie 1. Résultats préliminaires.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$.

(a) Soit $j \in [\![0,p]\!]$. On a :

$$\frac{1}{1+j}\binom{p}{j} = \frac{p!}{(1+j)(j!(p-j)!} = \frac{1}{p+1}\frac{p!(p+1)}{(1+j)(j!(p-j)!} = \frac{1}{p+1}\frac{(p+1)!}{(j+1)!(p-j)!} = \frac{1}{p+1}\binom{p+1}{j+1}$$

car $p-j = (p+1)-(j+1)$.

(b) Soit $j \in [\![0,p-1]\!]$. On a en mettant au même dénominateur :

$$\binom{p}{j+1} + \binom{p}{j} = \frac{p!}{(j+1)!(p-j-1)!} + \frac{p!}{j!(p-j)!} = \frac{p!(p-j)+p!(j+1)}{(j+1)!(p-j)!} = \frac{(p+1)!}{(j+1)!(p-j)!} = \binom{p+1}{j+1}$$

car $p-j = (p+1)-(j+1)$.

2. Cf cours.

3. **(a)** Soit $i > 1$ un entier. La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\forall t \in [i, i+1], \quad \frac{1}{t} \leq \frac{1}{i} \quad \text{et} \quad \forall t \in [i-1, i], \quad \frac{1}{t} \geq \frac{1}{i}.$$

En intégrant ces deux inégalités, on obtient par croissance de l'intégrale :

$$\int_i^{i+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_i^{i+1} \frac{1}{i} dt = \frac{1}{i} = \int_{i-1}^{i} \frac{1}{i} dt \leq \int_{i-1}^{i} \frac{1}{t} dt.$$

(b) Soit $n > 1$. On a :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}.$$

Or il est clair par opération sur les limites usuelles que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1$.

On a donc bien : $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

(c) En sommant les inégalités de la question **3.(a)** pour i allant de 2 à $n \geq 2$ on a :

$$\sum_{i=2}^{n} \int_i^{i+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{i=2}^{n} \int_{i-1}^{i} \frac{1}{t} dt.$$

Par la relation de Chasles on obtient alors :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int_1^{n} \frac{1}{t} dt$$

puis :

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n).$$

Enfin en ajoutant le premier terme membre à membre :

$$\ln(n+1) - \ln(2) + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1.$$

En divisant membre à membre par $\ln(n)$, les membres de gauche et de droite tendent vers 1 en $+\infty$ d'après la question précédente. Le théorème des gendarmes donne alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} = 1.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

Partie 2. Quelques résultats autour de la loi exponentielle

On se donne un entier naturel $n > 0$, un réel strictement positif λ et une famille de n variables aléatoires notées X_1,…,X_n indépendantes et identiquement distribuées [1] selon la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On définit $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

4. Soit $x \geq 0$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{(1)} > x) = \mathbb{P}(\cap_{k=1}^{n}[X_k > x]) &= \prod_{k=1} \mathbb{P}(X_k > x) \quad \text{par indépendance} \\ &= \prod_{k=1} (1 - \mathbb{P}(X_k \leq x)) \\ &= (e^{-\lambda x})^n\end{aligned}$$

car $X_1, \ldots, X_n$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
On en déduit alors, pour tout $x \geq 0$:

$$F_{X_{(1)}}(x) = \mathbb{P}(X_{(1)} \leq x) = 1 - \mathbb{P}(X_{(1)} > x) = 1 - e^{-n\lambda x}.$$

Par ailleurs, comme $X_1, \ldots, X_n$ sont presque-surement positives, il est clair que pour tout $x < 0$:

$$F_{X_{(1)}}(x) = \mathbb{P}(X_{(1)} \leq x) = 0.$$

On reconnaît alors que $F_{X_{(1)}}$ est la fonction de répartition d'une variable suivant la loi exponentielle de paramètre $n\lambda$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$.

— Si $x < 0$. Il est clair que $F_{X_{(n)}}(x) = \mathbb{P}(X_{(n)} \leq x) = 0$ car $X_1, \ldots, X_n$ sont presque-surement positives.

— Si $x \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned}F_{X_{(n)}}(x) = \mathbb{P}(X_{(n)} \leq x) = \mathbb{P}(\cap_{k=1}^{n}[X_k \leq x]) &= \prod_{k=1} \mathbb{P}(X_k \leq x) \quad \text{par indépendance} \\ &= (1 - e^{-\lambda x})^n\end{aligned}$$

Ainsi : $F_{X_{(n)}} : x \mapsto (1 - e^{-\lambda x})^n 1_{\mathbb{R}^+}(x)$.
En particulier, $F_{X_{(n)}}$ est de classe C^1 (donc continue) sur $\mathbb{R}^*$.
De plus : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_{X_{(n)}}(x) = 0 = F_{X_{(n)}}(0) = \lim\limits_{x \to 0+} F_{X_{(n)}}(x)$ donc il y a continuité en 0 aussi.
Finalement, $F_{X_{(n)}}$ est classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et continue sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, $X_{(n)}$ est à densité. Comme on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad F'_{X_{(n)}}(x) = n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} 1_{\mathbb{R}^+}(x)$$

on en déduit que

$$f_n : x \longmapsto n\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} 1_{\mathbb{R}^+}(x)$$

est une densité $X_{(n)}$.

1. C'est-à-dire de même loi.

6. La variable $X_{(n)}$ possède une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf_n(x)dx$ converge absolument.

— Sur $]-\infty,0[$, f_n est nulle donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xf_n(x)dx$ converge absolument (et vaut 0).

— Sur $[0,+\infty[$, $x \mapsto xf_n(x)$ est positive si bien que la converge et la convergence absolue sont équivalentes. Pour tout $x \geq 0$, on a, par le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
n\lambda x e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1} &= n\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x e^{-\lambda x}(-1)^k e^{-k\lambda x} \\
&= n\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x e^{-\lambda(k+1)x}(-1)^k \\
&= n\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x\lambda(k+1) e^{-\lambda(k+1)x} \frac{(-1)^k}{\lambda(k+1)}.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\lambda(k+1)e^{-\lambda(k+1)x}dx$ converge et vaut $\dfrac{1}{\lambda(k+1)}$ car on reconnaît l'espérance d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda(k+1))$.

Par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} n\lambda x e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}dx$ converge et :

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty} n\lambda x e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{n-1}dx &= = n\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-)^k \int_{0}^{+\infty} x e^{-\lambda(k+1)x}dx \\
&= n\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{(-1)^k}{\lambda^2(k+1)^2}.
\end{aligned}$$

— Comme $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xf_n(x)dx$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} xf_n(x)dx$ convergent absolument alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf_n(x)dx$ converge absolument.

Finalement, $X_{(n)}$ possède une espérance et les calculs ci-dessus donnent :

$$\begin{aligned}
E(X_{(n)}) = \int_{-\infty}^{0} xf_n(x)dx + \int_{0}^{+\infty} xf_n(x)dx &= n\lambda \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{(-1)^k}{\lambda^2(k+1)^2} \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}.
\end{aligned}$$

En appliquant la question **1.(a)** avec $p = n-1$, on a pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$:

$$\frac{1}{k+1}\binom{n-1}{k} = \frac{1}{n}\binom{n}{k+1}$$

d'où :

$$\begin{aligned}E(X_{(n)}) &= \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\\ &= \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k+1}\frac{(-1)^k}{k+1}.\end{aligned}$$

7. Dans cette question, on veut prouver que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j+1}\frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}.$$

(a) Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après le binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}(-1)^k = (1-1)^{p+1} = 0.$$

(b) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(p)$: « $\displaystyle\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j+1}\frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}$ ».

Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(p)$ est vraie.

— Initialisation : pour $p = 1$ les deux membres valent 1 donc son bien égaux.

— Hérédité : soit $p \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\mathcal{P}(p)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(p+1)$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{p}\binom{p+1}{j+1}\frac{(-1)^j}{j+1} &= \sum_{j=0}^{p-1}\binom{p+1}{j+1}\frac{(-1)^j}{j+1} + \frac{(-1)^p}{p+1}\\ &= \sum_{j=0}^{p-1}\left(\binom{p}{j+1}+\binom{p}{j}\right)\frac{(-1)^j}{j+1} + \frac{(-1)^p}{p+1} \quad \text{d'après } \mathbf{1.(b)}\\ &= \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} + \sum_{j=0}^{p-1}\binom{p}{j}\frac{(-1)^j}{j+1} + \frac{(-1)^p}{p+1} \quad \text{HR}\\ &= \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} + \sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{p+1}\binom{p+1}{j+1}(-1)^j + \frac{(-1)^p}{p+1} \quad \text{d'après } \mathbf{1.(b)}\\ &= \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} + \sum_{j=0}^{p}\frac{1}{p+1}\binom{p+1}{j+1}(-1)^j.\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $k = j + 1$ on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} &= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} + \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{p+1} \binom{p+1}{j+1} (-1)^j \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} + \frac{1}{p+1} \sum_{j=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k} + \frac{1}{p+1} \quad \text{d'après } \mathbf{7.(a)}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

— Conclusion : par principe de récurrence on a prouvé que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(p)$ est vraie.

8. D'après les questions **7.(b)**, **6** et **3.(c)**, on a

$$E(X_{(n)}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{\lambda}.$$

9. On définit la suite $u = (\lambda E(X_{(n)}) - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après **6** et **7.(b)**, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \lambda E(X_{(n+1)}) - \ln(n+1) - \lambda E(X_{(n)}) + \ln(n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \ln(n) \\
&= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc en utilisant le développement limité de $x \mapsto \ln(1-x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, un étude de $x \mapsto x - \ln(1+x)$ montre qu'elle est positive sur R_+ si bien que $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est à termes positifs.

D'après le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, les séries $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et $\sum \frac{1}{2n^2}$ sont de même nature.

Or on sait que $\sum \frac{1}{2n^2}$ converge donc $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente.

(b) Soit $n \geq 2$. Alors par télescopage :

$$u_n - u_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k).$$

La question précédente montre que le membre de droite converge lorsque n tend vers $+\infty$.
Ainsi la suite u est convergente aussi.

Partie 3. Loi de Gumbel

On reprend les notations de la partie précédente et on rappelle que la variable X_1 suit une loi exponentielle de paramètre λ. On définit la fonction f par :

$$f : x \longmapsto \lambda \exp(-x) \exp(-\lambda \exp(-x)).$$

10. La fonction f est clairement positive (exp est positive) et continue sur $\mathbb{R}$ (par produit et composition de fonctions continues).

Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1. Cette intégrale est généralisée en $-\infty$ et $+\infty$.

— Étude de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ généralisée en $-\infty$. Soit $A < 0$ et effectuons le changement de variable $y = e^{-x}$ qui est licite car $x \mapsto e^{-x}$ est de classe C^1 et strictement monotone sur $]-\infty, 0]$:

$$\int_A^0 f(x)dx = -\int_{e^{-A}}^{1} \lambda e^{-\lambda y} dy = \left[e^{-\lambda y}\right]_{e^{-A}}^{1} = \exp(-\lambda) - \exp(-\lambda \exp(-A)).$$

Donc : $\displaystyle\lim_{A \to -\infty} \int_A^0 f(x)dx = \exp(-\lambda)$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ converge et vaut $\exp(-\lambda)$.

— Étude de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ généralisée en $+\infty$. Soit $A > 0$ et effectuons le changement de variable $y = e^{-x}$ qui est licite car $x \mapsto e^{-x}$ est de classe C^1 et strictement monotone sur $[0, +\infty[$:

$$\int_0^A f(x)dx = -\int_{1}^{e^{-A}} \lambda e^{-\lambda y} dy = \left[e^{-\lambda y}\right]_{1}^{e^{-A}} = \exp(-\lambda \exp(-A)) - \exp(-\lambda).$$

Donc : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^A f(x)dx = 1 - \exp(-\lambda)$.

Ainsi $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut $1 - \exp(-\lambda)$.

— Les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$ convergent donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Donc la fonction f est bien une densité de probabilité.

On appellera cette loi la *la loi de Gumbel de paramètre* λ.

L'indication n'était pas très utile puisqu'on pouvait voir directement que $x \mapsto -\exp(-\lambda e^{-x})$ *est une primitive de* f.

11. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par stricte croissante de exp :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(-\ln(X_1) \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \geq e^{-x}) = 1 - \mathbb{P}(X_1 < e^{-x}).$$

Or X_1 est à densité donc : $\mathbb{P}(X_1 < e^{-x}) = \mathbb{P}(X_1 \leq e^{-x})$. Ainsi :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(-\ln(X_1) \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \geq e^{-x}) = 1 - F_{X_1}(e^{-x}).$$

Enfin, X_1 suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ et $e^{-x} > 0$ donc

$$F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = 1 - F_{X_1}(e^{-x}) = 1 - (1 - \exp(-\lambda e^{-x})) = \exp(-\lambda e^{-x}).$$

Comme F_Y est clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ alors Y est à densité et une densité est donnée par $F_Y' = f$. Ainsi $Y = -\ln(X_1)$ suit une loi de Gumbel de paramètre λ.

12. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0$ donc par équivalent usuel :

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n}$$

d'où

$$n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} x.$$

En particulier :

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x.$$

La continuité de exp donne alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x).$$

13. Dans cette question, on prend $\lambda = 1$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$F_n(x) = \mathbb{P}(X_{(n)} - \ln(n) \leq x) = \mathbb{P}(X_{(n)} \leq x + \ln(n)).$$

D'après le calcul de $F_{X_{(n)}}$ de la question **5** on a :

$$F_n(x) = \mathbb{P}(X_{(n)} \leq x + \ln(n)) = \begin{cases} (1 - \exp(-(x+\ln(n)))^n & \text{si } x + \ln(n) \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x \geq -\ln(n) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} -\ln(n) = -\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$:

$$x \geq -\ln(n).$$

Ainsi, pour tout $n \geq n_0$ on a :

$$F_n(x) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \exp(e^{-x}) = F_Y(x).$$

Problème 2 - D'après Agro-Véto 2023

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On s'intéresse dans ce problème à l'évolution d'une population dont les individus peuvent suivre n différentes stratégies de survie (numérotées de 1 à n) en utilisant une modélisation en temps continu.

Pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note x_i la proportion des individus qui adoptent la stratégie numéro i et $m_{i,j}$ représente l'avantage sélectif qu'un individu qui adopte la stratégie i retire d'une interaction avec un autre individu qui adopte la stratégie j.

Ainsi, le taux de croissance de x_i à un temps t s'écrit comme la différence entre l'avantage sélectif tiré de son interaction avec les autres $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j(t)\right)$ et l'avantage moyen des individus de toute la population $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} m_{j,k} x_j(t) x_k(t)\right)$.

On se donne donc une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on note $m_{i,j}$ le coefficient situé à la i-ième ligne et la j-ième colonne.
On cherche à déterminer n fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$, notées $x_1, \ldots, x_n$ telles que pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$ on ait :

$$(1) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad x_i'(t) = x_i(t) \left(\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j(t) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} m_{j,k} x_j(t) x_k(t) \right).$$

Partie 1. Quelques résultats utiles

Soit a une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E_1) \quad : \quad y'(t) = a(t) y(t).$$

1. Cf cours.

2. Soit f est une solution de (E_1). Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in \ I, \quad f(t) = ce^{A(t)}$$

où A est une primitive de a.
S'il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = 0$ alors on a :

$$ce^{A(t_0)} = 0$$

et comme $e^{A(t_0)} \neq 0$ alors $c = 0$ et f est nulle sur l'intervalle I.

Soit b une fonction continue sur $\mathbb{R}$, C une constante réelle et g une solution sur un intervalle I de l'équation différentielle :

$$(E_2) \quad : \quad y'(t) = b(y(t))(y(t) - C).$$

3. Notons $y = g - C$. Comme g est solution de (E_2) elle est dérivable sur I donc y aussi et on a pour tout $t \in I$:

$$y'(t) = g'(t) = b(g(t))(g(t) - C) = b(g(t))y(t).$$

4. D'après la question **3** et **2** appliquée à $g - C$, s'il existe $t_0 \in I$ tel que $g(t_0) = C$ alors $g - C$ est nulle sur I donc g est constante sur I.

Partie 2. Étude d'un exemple

On étudier dans cette partie, le système (1) lorsque $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On s'intéresse donc aux triplets de fonctions (x_1, x_2, x_3) qui sont solutions sur $\mathbb{R}^+$ du système :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x_1' & = & x_1(x_2 - x_3) \\ x_2' & = & x_2(x_3 - x_1) \\ x_3' & = & x_3(x_1 - x_2) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) = 1.$$

5. On a :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & C_1(C_2 - C_3) \\ 0 & = & C_2(C_3 - C_1) \\ 0 & = & C_3(C_1 - C_2) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & C_1 \\ 0 & = & C_2(C_3 - C_1) \\ 0 & = & C_3(C_1 - C_2) \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & C_2 - C_3 \\ 0 & = & C_2(C_3 - C_1) \\ 0 & = & C_3(C_1 - C_2) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & C_1 \\ 0 & = & C_2 C_3 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} C_2 & = & C_3 \\ 0 & = & C_2(C_2 - C_1) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & C_1 \\ 0 & = & C_2 C_3 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} C_2 & = & C_3 \\ 0 & = & C_2(C_2 - C_1) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} C_1 & = & 0 \\ C_2 & = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} C_1 & = & 0 \\ C_3 & = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} C_2 & = & 0 \\ C_3 & = & 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} C_2 & = & C_3 \\ C_1 & = & C_2 \end{array} \right.$$

Compte tenu de la condition $x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) = 1$ c'est-à-dire $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, on obtient les quatre solutions

$$(1, 0, 0) \ ; \ (0, 1, 0) \ ; \ (0, 0, 1) \ ; \ \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

6. On s'intéresse à une petite perturbation autour d'une solution constante identifiée à la question précédente, ce qui conduit à étudier les triplets de fonctions (h_1, h_2, h_3) vérifiant :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} h_1' &=& \frac{1}{3}(h_2 - h_3) \\ h_2' &=& \frac{1}{3}(h_3 - h_1) \\ h_3' &=& \frac{1}{3}(h_1 - h_2) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad h_1(0) + h_2(0) + h_3(0) = 0.$$

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned}
rg\,(M - \lambda I_3) &= rg\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= rg\left(\begin{pmatrix} -1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \quad (L_1 \leftrightarrow L_2) \\
&= rg\left(\begin{pmatrix} -1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1+\lambda^2 & -1-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \quad \begin{array}{rcl} L_3 & \leftarrow & L_3 + L_1 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 - \lambda L_1 \end{array} \\
&= rg\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & -\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 1+\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & -1-\lambda \end{pmatrix}\right) \quad (C_2 \leftrightarrow C_3) \\
&= rg\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & -\lambda \\ 0 & -2 & 2+\lambda+\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & -1-\lambda \end{pmatrix}\right) \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_3) \\
&= rg\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & -\lambda \\ 0 & -2 & 2+\lambda+\lambda^2 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}\right) \quad (L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1-\lambda}{2} L_2)
\end{aligned}$$

où

$$* = -1 - \lambda + \frac{1-\lambda}{2}(2 + \lambda + \lambda^2) = \frac{-3\lambda - \lambda^3}{2}.$$

Ainsi :

$$rg(M - \lambda I_3) < 3 \iff -3\lambda - \lambda^3 = 0 \iff \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 = -3.$$

Ainsi : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0, -i\sqrt{3}, i\sqrt{3}\}$.

— Valeur propre 0 : soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

$$X \in E_0(M) \iff MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = y = z.$$

Donc $E_0(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

— Valeur propre $i\sqrt{3}$: soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}
X \in E_{i\sqrt{3}}(M) &\Longleftrightarrow X = i\sqrt{3}X\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y-z &=& i\sqrt{3}x\\ -x+z &=& i\sqrt{3}y\\ x-y &=& i\sqrt{3}z\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -i\sqrt{3}x+y-z &=& 0\\ -x-i\sqrt{3}y+z &=& 0\\ x-y-i\sqrt{3}z &=& 0\end{array}\right.\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -i\sqrt{3}x+y-z &=& 0\\ -x-i\sqrt{3}y+z &=& 0\\ -(1+i\sqrt{3})y+(1-i\sqrt{3})z &=& 0\end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3+L_2\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}z\\ y &=& -\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Donc $E_{i\sqrt{3}}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\\ -\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\\ 1\end{pmatrix}\right)$.

— Valeur propre $-i\sqrt{3}$: on peut faire des calculs similaires ou remarquer en passant au conjugué :

$$MX = -i\sqrt{3}X \Longleftrightarrow M\overline{X} = i\sqrt{3}\overline{X}.$$

Les vecteurs propres associés à $-i\sqrt{3}$ sont les conjugués de ceux associés à $i\sqrt{3}$.

On trouve donc : $E_{-i\sqrt{3}}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\\ -\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\\ 1\end{pmatrix}\right)$.

(b) Il y a trois valeurs propres et chaque sous espace propre est de dimension 1. La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de M : M est diagonalisable.

Comme on veut que P ne soit constituée que de 1 sur la première ligne, on va multiplier les vecteurs formant une base des sous-espaces propres par des scalaires non nuls pour obtenir de nouveaux vecteurs avec un 1 en première coordonnée et formant encore une base des SEP.

— En multipliant par $\dfrac{2}{-1+i\sqrt{3}} = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$:

$$E_{i\sqrt{3}}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\right).$$

— En multipliant par $\dfrac{2}{-1-i\sqrt{3}} = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ (ou en passant au conjugué le vecteur ci-dessus) :

$$E_{-i\sqrt{3}}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi en posant :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

on a bien

$$M = PDP^{-1}.$$

Partie 3. Étude d'un deuxième exemple

On étudie maintenant le cas où $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans, ce cas on peut montrer que x_1 est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(4) \quad y' = y(y-1)(4y-3).$$

7. Soit trois réels A,B et C et $x \in \mathbb{R}\backslash\{0, 3/4, 1\}$:

$$\begin{aligned} \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{4x-3} &= \frac{A(x-1)(4x-3) + Bx(4x-3) + Cx(x-1)}{x(x-1)(4x-3)} \\ &= \frac{(4A+4B+C)x^2 + (-7A-3B-C)x + 3A}{x(x-1)(4x-3)}. \end{aligned}$$

Donc A, B, C conviennent si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0, 3/4, 1\}, \quad (4A+4B+C)x^2 + (-7A-3B-C)x + 3A = 1$$

si et seulement si (le seul polynôme avec une infinité de racine est le polynôme nul) :

$$(4A+4B+C)x^2 + (-7A-3B-C)X + 3A - 1 = 0.$$

Ainsi :

$$(A,B,C)\quad\text{solution} \iff \left\{\begin{array}{lcl} 4A+4B+C & = & 0 \\ -7A-3B-C & = & 0 \\ 3A-1 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} 4A+4B+C & = & 0 \\ -3A+B & = & 0 \\ A & = & 1/3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} C & = & -16/3 \\ B & = & 1 \\ A & = & 1/3 \end{array}\right.$$

Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,3/4,1\}, \qquad \frac{1}{x(x-1)(4x-3)} = \frac{1}{3x} + \frac{1}{x-1} - \frac{16}{3(4x-3)}.$$

8. Sur l'intervalle $]0,3/4[$ les primitives de h sont les fonctions :

$$x \longmapsto \frac{1}{3}\ln|x| + \ln|x-1| - \frac{16}{3} \times \frac{1}{4}\ln|4x-3| + C$$

où $C \in \mathbb{R}$. Comme $x \mapsto x-1$ et $x \mapsto 4x-3$ sont négatives sur $]0,3/4[$, on obtient pour les primitives de h :

$$x \longmapsto \frac{1}{3}\ln(x) + \ln(1-x) - \frac{4}{3}\ln(3-4x) + C$$

où $C \in \mathbb{R}$.

9. On suppose que $x_1(0) \in]0,3/4[$ et qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$, $x_1(t_0) \notin]0,3/4[$.
La fonction x_1 est continue et part de $]0,3/4[$ en 0 pour en sortir en t_0 : soit elle sort par la gauche et passe par 0 soit elle sort par la droite et passe par 3/4. Plus précisément d'après le TVI, il existe $t_1 \in]0,t_0]$ tel que $x_1(t_1) = 0$ ou $x_1(t_1) = \frac{3}{4}$.
Supposons par exemple que $x_1(t_1) = 0$. Comme :

$$x_1' = (x_1-1)(4x_1-3)x_1 = ax_1$$

où $a = (x_1-1)(4x_1-3)$ alors la question **2**, x_1 est nulle sur $[0,t_1]$ ce qui contredit le fait que $x_1(0) \in]0,3/4[$.
De même si $x_1(t_1) = \frac{3}{4}$, comme

$$x_1' = x_(x_1-1)(4x_1-3) = 4b(x_1)(x_1 - \frac{3}{4})$$

où $b : x \mapsto = x(x-1)$ alors la question **4** implique que x_1 est constante égale à $\frac{3}{4}$ sur $[0,t_1]$ ce qui contredit le fait que $x_1(0) \in]0,3/4[$.
Finalement dans les deux cas on obtient une contradiction et donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x_1(t) \in]0,3/4[$.

On suppose dans toute la suite que $x_1(0) \in]0,3/4[$.

10. On sait que :

$$x_1' = x_1(x_1-1)(4x_1-3).$$

On a supposé que $x_1(0) \in]0, 3/4[$ donc d'après la question précédente pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x_1(t) \in]0, 3/4[$ si bien que le membre de droite ne s'annule jamais. En divisant on obtient sur $\mathbb{R}_+$:

$$x_1' h(x_1) = 1.$$

On reconnait dans le membre de gauche la dérivée de $t \mapsto H(x_1(t))$ où H est une primitive de h donc en primitivant on trouve que x_1 vérifie :

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{1}{3}\ln(x_1(t)) + \ln(1 - x_1(t)) - \frac{4}{3}\ln(3 - 4x_1(t)) = t + C$$

où $C \in \mathbb{R}$. Par les propriétés du logarithme on a :

$$\frac{1}{3}\ln(x)+\ln(1-x)-\frac{4}{3}\ln(3-4x) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x(1-x)^3}{(3-4x)^4}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x(1-x)^3}{(3/4-x)^4}\right) - \frac{4}{3}\ln(4).$$

Finalement, il existe $D \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ on ait :

$$t + D = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x_1(t)(1 - x_1(t))^3}{(x_1(t) - 3/4)^4}\right).$$

11. On sait pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x_1(t) \in]0, 3/4[$ donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad x_1'(t) = x_1(t)(x_1(t) - 1)(4x_1(t) - 3) \geq 0.$$

Donc x_1 est croissante et majorée. Par le théorème de la limite monotone, x_1 admet une limite finie ℓ en $+\infty$ et on a :

$$0 < x_1(0) \leq \ell \leq \frac{3}{4}.$$

Supposons que $\ell < \frac{3}{4}$. Alors :

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x_1(t)(1 - x_1(t))^3}{(x_1(t) - 3/4)^4}\right) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{\ell(1-\ell)^3}{(3/4-\ell)^4}\right) < +\infty$$

alors que $\lim_{t\to+\infty} t + D = +\infty$. Cela contredit la question précédente.

Par conséquent $\ell = \frac{3}{4}$.

En déduire que $\lim_{t\to+\infty} x_1(t) = 3/4$.