Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DS6- 2h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

1 Exercice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P\left(X = n\right) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}.$$

On réalise l'expérience aléatoire suivante :

— On tire un nombre entier au hasard selon la loi de X.
— Puis en fonction de la valeur n prise par X, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.

On note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

1. **a.** Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.
   b. En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$, $P\left([U = k]\right)$.
   c. Reconnaître la loi de $U+1$ et en déduire que U admet une espérance et une variance que l'on déterminera.
2. **a.** Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.
   b. En déduire la loi de V.
3. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.
4. Que vaut $\mathrm{Cov}(U, V)$? En déduire $\mathrm{Cov}(X, U)$.
5. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & U \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer $P(X = U)$.
   (b) Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable.

2 Problème – d'après G2E 2023

Dans ce problème, a, b, c et d désignent des entiers naturels.
On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lequel I_2 désigne la matrice identité et 0_2 la matrice nulle.
Ce problème est consacré à une expérience aléatoire qui peut-être représentée par une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2.1 Partie A – Matrices d'ajout

On considère une expérience aléatoire que l'on suppose modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qui nécessite le matériel suivant :

— une urne de taille infinie contenant initialement une boule noire et une boule blanche ;
— un stock infini de boules noires ;
— un stock infini de boules blanches.

L'expérience consiste à tirer successivement et indéfiniment une boule dans l'urne de façon aléatoire (les boules sont supposées indiscernables au toucher).
À chaque étape, on note la couleur de la boule tirée, on la replace dans l'urne et on ajoute d'autres boules selon une règle fixée pendant toute l'expérience : si on a tiré une boule noire, on ajoute dans l'urne a boules noires et b boules blanches ; si on a tiré une boule blanche, on ajoute c boules noires et d boules blanches.
Cette règle est résumée par la matrice ci-dessous que l'on appellera « matrice d'ajout » :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Lorsque $a + b = c + d$, on notera σ_A cette valeur commune et on dira que la matrice d'ajout A est équilibrée. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices d'ajout équilibrées (c'est-à-dire l'ensemble des matrices de taille 2, à coefficients entiers naturels et dont la somme des coefficients sur la première ligne est égale à la somme des coefficients sur la seconde ligne).

1. Dans cette question uniquement, on suppose que :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) À une certaine étape, l'urne contient 3 boules noires et 5 boules blanches et on tire une boule noire. Quelle est la composition de l'urne à l'étape suivante ?

(b) Calculer σ_A. Que représente σ_A ? Est-il possible qu'à une certaine étape, il y ait 22 boules blanches et 20 boules noires ? Justifier votre réponse.

2. On revient au cas général.

(a) Justifier que $\mathcal{A}$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(b) Démontrer que : $\forall A \in \mathcal{A}$, $\sigma_A = 0 \Longleftrightarrow A = 0_2$.

(c) Montrer que si A et A' appartiennent à $\mathcal{A}$ alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A + kA' \in \mathcal{A}$.

(d) Montrer que si A et A' appartiennent à $\mathcal{A}$ alors, $AA' \in \mathcal{A}$.

3. On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{A}$.

(a) Montrer que σ_A est une valeur propre de A et donner un vecteur propre associé.
(b) Montrer que $d - b = a - c$. Cette valeur sera notée δ_A. Montrer que δ_A est une valeur propre de A.

4. Soit $A \in \mathcal{A}$.
(a) Montrer que le déterminant de A est égal à $\sigma_A \delta_A$.
(b) On pose :
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
Vérifier que $AA' = \sigma_A \delta_A I_2$.
(c) En déduire que A est inversible d'inverse A^{-1} appartenant à $\mathcal{A}$ si et seulement si :
$$A = I_2 \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. (a) Démontrer que toute matrice d'ajout équilibrée est diagonalisable (on pourra discuter selon que $\sigma_A = \delta_A$ ou $\delta_A < \sigma_A$) et en déduire l'ensemble des matrices appartenant à $\mathcal{A}$ non inversibles.
(b) Donner un exemple de matrice d'ajout non équilibrée et diagonalisable. Justifier votre réponse.
(c) Donner un exemple de matrice d'ajout non équilibrée et non diagonalisable. Justifier votre réponse.

2.2 Partie B–Une matrice d'ajout particulière

On fixe $\sigma \in \mathbb{N}$ et on réalise l'expérience aléatoire précédemment décrite dans le cas où :
$$A = \sigma I_2.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ième tirage est noire et 0 sinon.
On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ égale au nombre de boules noires à l'issue du n-ième tirage.

6. (a) Préciser l'ensemble des valeurs prises par S_n et justifier que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :
$$S_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} = S_n + \sigma X_{n+1}.$$
(b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $s \in S_n(\Omega)$:
$$P(X_{n+1} = 1 \mid S_n = s) = \frac{s}{2 + \sigma n}.$$

7. (a) En calculant $P(X_{n+1} = 1)$ démontrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(X_{n+1}) = \frac{E(S_n)}{2 + \sigma n}.$$
(b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence en déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(S_n) = \frac{2 + \sigma n}{2}.$$
(c) En déduire la loi de X_n (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).