Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DS6- 2H

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Il ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les initiatives qu'il sera amené à prendre.

1 Exercice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad P(X = n) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}.$$

On réalise l'expérience aléatoire suivante :

- On tire un nombre entier au hasard selon la loi de X.
- Puis en fonction de la valeur n prise par X, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule dans cette urne.

On note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose $V = X - U$.

1. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant $[X = n]$, l'urne contient $n+1$ boules numérotées de 0 à n indiscernables. Donc la loi de U sachant $[X = n]$ est une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$. Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P_{[X=n]}(U = k) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{si } k \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X = n])_{n\in\mathbb{N}}$, on a

$$\begin{aligned} P(U = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P_{[X=n]}(U = k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n)\frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

car, d'après la question précédente, pour tout $n < k$, $P_{[X=n]}(U = k) = 0$. Compte tenu de la loi de X, on trouve :

$$\begin{aligned}
P(U=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X=n)\frac{1}{n+1} &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times \frac{4(n+1)}{3^{n+2}} \\
&= \frac{4}{9}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \\
&= \frac{4}{9}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n} - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{3^n}\right) \\
&= \frac{4}{9}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^k}{1-\frac{1}{3}}\right) \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^k}
\end{aligned}$$

c. La variable $U+1$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(U+1=k) = P(U=k-1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^{k-1}}.$$

Ainsi $U+1$ suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

En particulier $U+1$ admet une espérance et une variance donc U aussi et on a :

$$E(U) = E(U+1) - 1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad V(U) = V(U+1) = \frac{3}{4}.$$

2. **a.** Remarquons avant tout que $U \leq X$ donc V est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
P_{[X=n]}(V=k) = P_{[X=n]}(X-U=k) &= P_{[X=n]}(n-U=k) \\
&= P_{[X=n]}(U=n-k) \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{si } n-k \in [\![0,n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{si } k \in [\![0,n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, sachant $[X=n]$, V suit une loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.

b. Le même calcul qu'en 1.b) donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(V=k) = \frac{2}{3^{k+1}}.$$

3. Soit $(n,k) \in (\mathbb{N})^2$. Alors

$$\begin{aligned}
P(U=n, V=k) = P(U=n, X-U=k) &= P(U=n, X=n+k) \\
&= P_{[X=n+k]}(U=n)P(X=n+k) \\
&= \frac{1}{n+k+1} \times \frac{4(n+k+1)}{3^{n+k+2}} \\
&= \frac{4}{3^{n+k+2}}.
\end{aligned}$$

D'autre part, d'après 1.b et 2.b :

$$P(U=n)P(V=k) = \frac{2}{3^{n+1}} \times \frac{2}{3^{k+1}} = \frac{4}{3^{n+k+2}}.$$

Ainsi, pour tout $(n,k) \in U(\Omega) \times V(\Omega)$ on a

$$P(U=n, V=k) = P(U=n)P(V=k).$$

Les variables aléatoires U et V sont donc indépendantes.

4. D'après la question précédente, $\mathrm{Cov}(U,V) = 0$ car la covariance de deux variables aléatoires discrètes indépendantes est toujours nulle. Par linéarité à gauche puis par symétrie de la covariance, on a

$$\mathrm{Cov}(X,U) = \mathrm{Cov}(U+V,U) = \mathrm{Cov}(U,U) + \mathrm{Cov}(V,U) = V(U) + \mathrm{Cov}(U,V) = V(U) = \frac{3}{4}.$$

5. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & U \end{pmatrix}$.

(a) En utilisant le système complet d'événements $([X=n])_{n\in\mathbb{N}}$ on a par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X=U) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{[X=n]}(U=X)P(X=n) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P_{[X=n]}(U=n)P(X=n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times \frac{4(n+1)}{3^{n+2}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{3^{n+2}} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

ou

$$P(X=U) = P(U+V=U) = \mathbb{P}(V=0) = \frac{2}{3}.$$

(b) Il s'agit d'une matrice triangulaire ses valeurs propres sont donc ses coefficients diagonaux : X et U.

— Si $[X=U]$ est réalisé alors M possède une unique valeur propre : X. Or $rg(M - XI_2) = rg\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ et donc d'après le théorème du rang, la dimension du seul sous-espace propre de M est 1 qui est strictement inférieur à la taille de M.
  Ainsi M n'est pas diagonalisable.

— Si $[X \neq U]$ est réalisé alors M possède deux valeurs propres réelles distinctes (X et U). Étant de taille 2, elle est donc diagonalisable.

Ainsi M est diagonalisable si et seulement si $[X \neq U]$ est réalisé. La probabilité recherchée est donc :

$$P(X \neq U) = 1 - P(X=U) = \frac{1}{3}.$$

2 Problème – d'après G2E 2023

Dans ce problème, a, b, c et d désignent des entiers naturels.
On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lequel I_2 désigne la matrice identité et 0_2 la matrice nulle.
Ce problème est consacré à une expérience aléatoire qui peut-être représentée par une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2.1 Partie A – Matrices d'ajout

On considère une expérience aléatoire que l'on suppose modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et qui nécessite le matériel suivant :

- une urne de taille infinie contenant initialement une boule noire et une boule blanche ;
- un stock infini de boules noires ;
- un stock infini de boules blanches.

L'expérience consiste à tirer successivement et indéfiniment une boule dans l'urne de façon aléatoire (les boules sont supposées indiscernables au toucher).
À chaque étape, on note la couleur de la boule tirée, on la replace dans l'urne et on ajoute d'autres boules selon une règle fixée pendant toute l'expérience : si on a tiré une boule noire, on ajoute dans l'urne a boules noires et b boules blanches ; si on a tiré une boule blanche, on ajoute c boules noires et d boules blanches.
Cette règle est résumée par la matrice ci-dessous que l'on appellera « matrice d'ajout » :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Lorsque $a + b = c + d$, on notera σ_A cette valeur commune et on dira que la matrice d'ajout A est équilibrée. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices d'ajout équilibrées (c'est-à-dire l'ensemble des matrices de taille 2, à coefficients entiers naturels et dont la somme des coefficients sur la première ligne est égale à la somme des coefficients sur la seconde ligne).

1. Dans cette question uniquement, on suppose que :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) À une certaine étape, l'urne contient 3 boules noires et 5 boules blanches et on tire une boule noire. On lit le nombre de boules ajoutées sur la première ligne de la matrice A : on va ajouter 3 boules noires et 0 boule blanche.

Pour le tirage suivant, il y aura donc 6 boules noires et 5 boules blanches.

(b) Ici $\sigma_A = 3 + 0 = 1 + 2 = 3$: il s'agit du nombre de boules total que l'on ajoute à chaque étape.

Comme on commence avec 2 boules (une de chaque couleur) et qu'on ajoute 3 boules à chaque étape alors au bout de n étape l'urne contient au total :

$$2 + 3n \quad \text{boules.}$$

Si à une étape n on avait 22 boules blanches et 20 boules noires alors :

$$42 = 20 + 22 = 2 + 3n$$

ce qui signifie que $40 = 3n$. Comme 40 n'est pas divisible par 3, il n'est pas possible d'avoir une telle composition d'urne.

2. On revient au cas général.

(a) Si on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ de la question précédente. Elle appartient bien à $\mathcal{A}$.
Mais $\frac{1}{2}A \notin \mathcal{A}$ car ses coefficients ne sont pas des entiers naturels.
Donc $\mathcal{A}$ n'est pas stable par multiplication par un scalaire : ce n'est donc pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(b) Soit $A \in \mathcal{A}$ et notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c, d des entiers naturels. On a, comme $\sigma_A = a + b = c + d$:

$$\begin{aligned} \sigma_A = 0 &\iff a + b = 0 \quad \text{et} \quad c + d = 0 \\ &\iff a = b = c = d = 0 \end{aligned}$$

car a, b, c et d sont positifs !
Ainsi on a bien $\sigma_A = 0 \iff A = 0_2$.

(c) Soit $A, A' \in \mathcal{A}$ et notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ avec $a, a', b, b', c, c', d, d'$ des entiers naturels. Soit $k \in \mathbb{N}$.
Alors :

$$A + kA' = \begin{pmatrix} a + ka' & b + kb' \\ c + kc' & d + kd' \end{pmatrix}.$$

En particulier $A + kA'$ est bien de taille 2 et à coefficients entiers naturels.
De plus :

$$a+ka'+b+kb' = a+b+k(a'+b') = \sigma_A+k\sigma_{A'} = (c+d)+k(c'+d') = c+kc'+d+kd'.$$

Ainsi la somme des coefficients sur la première ligne est égale à la somme des coefficients sur la seconde ligne et donc $A + kA'$ est bien dans $\mathcal{A}$.

(d) En conservant les notations précédentes on a

$$AA' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ a'c + c'd & b'c + dd' \end{pmatrix}.$$

En particulier AA' est bien de taille 2 et à coefficients entiers naturels.
De plus :

$$\begin{aligned} aa' + bc' + ab' + bd' &= a(a' + b') + b(c' + d') = a\sigma_{A'} + b\sigma_{A'} = (a + b)\sigma_{A'} = \sigma_A\sigma_{A'}; \\ a'c + c'd + b'c + dd' &= c(a' + b') + d(c' + d') = c\sigma_{A'} + d\sigma_{A'} = (c + d)\sigma_{A'} = \sigma_A\sigma_{A'}. \end{aligned}$$

Ainsi la somme des coefficients sur la première ligne est égale à la somme des coefficients sur la seconde ligne et donc AA' est bien dans $\mathcal{A}$.

3. On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{A}$.

(a) On a

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(A-\sigma_A I_2) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} a-\sigma_A & b \\ c & d-\sigma_A\end{pmatrix}\right) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} a-(a+b) & b \\ c & d-(c+d)\end{pmatrix}\right)\\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -b & b \\ c & -c\end{pmatrix}\right)\\ &\leq 1\end{aligned}$$

car les deux colonnes sont colinéaires.
De plus on remarque le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre car :

$$(A-\sigma_A I_2)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b+b\\c-c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

(b) On sait que $a+b=c+d$. Donc en soustrayant membre à membre par $(b+c)$ on a :

$$a-c=d-b.$$

On note δ_A cette valeur.

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(A-\delta_A I_2) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} a-\delta_A & b \\ c & d-\delta_A\end{pmatrix}\right) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} a-(a-c) & b \\ c & d-(d-b)\end{pmatrix}\right)\\ &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} c & b \\ c & b\end{pmatrix}\right)\\ &\leq 1\end{aligned}$$

car les deux colonnes sont colinéaires. Ainsi δ_A est une valeur propre de A.

4. Soit $A \in \mathcal{A}$.

(a) On a, en conservant les notations précédentes :

$$\det(A) = ad - cb.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\sigma_A\delta_A = (a+b)(d-b) = ad-ba+bd-b^2 &= ad-cb+cb-ba+bd-b^2\\ &= \det(A)+b(c-a+b-d)\\ &= \det(A)+b(\delta_A-\delta_A)\\ &= \det(A).\end{aligned}$$

(b) On a :

$$AA' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab-bc & 0 \\ 0 & ab-bc\end{pmatrix} = \det(A)I_2.$$

Avec la question précédente on a bien : $AA' = \sigma_A\delta_A I_2$.

(c) Supposons A inversible et d'inverse dans $\mathcal{A}$. Alors avec les questions précédentes :

$$\sigma_A \delta_A = \det(A) \neq 0$$

et

$$A^{-1} = \frac{1}{\sigma_A \delta_A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

L'hypothèse $A^{-1} \in \mathcal{A}$ implique que les coefficients

$$\frac{d}{\sigma_A \delta_A} \quad ; \quad \frac{-b}{\sigma_A \delta_A} \quad ; \quad \frac{-c}{\sigma_A \delta_A} \quad ; \quad \frac{a}{\sigma_A \delta_A}$$

sont des entiers naturels et vérifient :

$$\frac{d}{\sigma_A \delta_A} + \frac{-b}{\sigma_A \delta_A} = \frac{-c}{\sigma_A \delta_A} + \frac{a}{\sigma_A \delta_A}.$$

Cette dernière condition est toujours vérifiées car les deux membres sont égaux à $\dfrac{1}{\sigma_A}$ mais comme les coefficients de A^{-1} sont entiers naturels, on doit donc avoir :

$$\frac{1}{\sigma_A} \in \mathbb{N}.$$

Comme σ_A est lui même un entier naturel cela force :

$$\sigma_A = 1.$$

Ainsi $\{a, b\} = \{0, 1\} = \{c, d\}$ ce qui laisse 4 matrices possibles :

$$I_2 \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mais les deux dernières ne sont pas inversibles.
Les seuls candidats possibles sont donc

$$A = I_2 \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors facilement que, réciproquement, ces matrices sont bien des matrices de $\mathcal{A}$ inversibles d'inverse dans $\mathcal{A}$.

5. (a) Il est clair qu'on a toujours $\delta_A \leq \sigma_A$.

— **Cas 1** : $\delta_A < \sigma_A$. D'après les questions précédentes δ_A, σ_A sont des valeurs propres distinctes et comme A est de taille 2 elle est diagonalisable.

Dans ce cas, A est non inversible si 0 est valeurs propre c'est-à-dire si δ_A ou σ_A vaut 0.

Si $\sigma_A = 0$ alors $a + b = 0 = c + d$ donc $a = b = c = d = 0$ et on est dans le cas 2 !

Si $\delta_A = 0$ alors $a = c$ et $d = b$ donc $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$.

— **Cas 2** : $\delta_A = \sigma_A$. On a alors :

$$a - c = a + b \quad \text{càd} \quad b + c = 0$$

et comme b et c sont des entiers naturels cela impose $b = c = 0$ et A est diagonale donc diagonalisable.
Dans ce cas, on a aussi $a = d$ donc $A = aI_2$ et A n'est pas inversible si et seulement si c'est la matrice nulle.

(b) Par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est triangulaire donc ses valeurs propres sont 1 et 3. Elle possède deux valeurs propres distinctes et est de taille 2 donc elle est diagonalisable.

(c) Par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire donc son unique valeur propre est 1. Si elle était diagonalisable, il existerait une matrice inversible P telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = I_2.$$

Or $A \neq I_2$ donc elle n'est pas diagonalisable.

2.2 Partie B–Une matrice d'ajout particulière

On fixe $\sigma \in \mathbb{N}$ et on réalise l'expérience aléatoire précédemment décrite dans le cas où :

$$A = \sigma I_2.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ième tirage est noire et 0 sinon.
On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ égale au nombre de boules noires à l'issue du n-ième tirage.

6. **(a)** L'urne contient initialement 1 boules noires ($S_0 = 1$) et à chaque tirage on en ajoute soit 0 soit σ. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc

$$S_n(\Omega) = \{1 + k\sigma \ ; \ k \in [\![0, n]\!]\}.$$

En particulier S_n prend un nombre fini de valeurs donc dans la suite, l'existence de l'espérance est garantie.
À l'issue du $n + 1$-ième tirage, l'urne contient les S_n boules noires présentes à l'issue du n-ième tirage ainsi que σ noires supplémentaires si on a tiré une boule noire au $n + 1$ tirage ($X_{n+1} = 1$) et aucune noire supplémentaire si on a tiré une boule. Ainsi :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad S_{n+1}(\omega) = \begin{cases} S_n(\omega) & \text{si } \omega \in [X_{n+1} = 0] \\ S_n(\omega) + \sigma & \text{si } \omega \in [X_{n+1} = 1] \end{cases} = S_n(\omega) + \sigma X_{n+1}(\omega).$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $s \in S_n(\Omega)$. Sachant $[S_n = s]$ à l'issue du n-ième tirage l'urne contient :

— les 2 boules initiales plus les σ ajoutées chaque tirage soit $2 + n\sigma$ boules au total;

— s boules noires.

Ainsi la probabilité de tirée une noire est $\dfrac{s}{2+n\sigma}$ d'où :

$$P(X_{n+1}=1 \mid S_n = s) = \frac{s}{2+\sigma n}.$$

7. **(a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([S_n = s])_{s\in S_n(\Omega)}$:

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=1) &= \sum_{s\in S_n(\Omega)} P(X_{n+1}=1 \mid S_n = s)P(S_n = s) \\ &= \sum_{s\in S_n(\Omega)} \frac{s}{2+\sigma n} P(S_n = s) \\ &= \frac{E(S_n)}{2+\sigma n}. \end{aligned}$$

Or X_{n+1} suit une loi de Bernoulli donc :

$$E(X_{n+1}) = P(X_{n+1}=1) = \frac{E(S_n)}{2+\sigma n}.$$

(b) Montrons le résultat par récurrence.

— Initialisation : le résultat est évident pour $n=0$ car $S_0 = 1$.

— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $E(S_n) = \dfrac{2+\sigma n}{2}$. D'après la question 6.a et par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(S_{n+1}) = E(S_n + \sigma X_{n+1}) &= E(S_n) + \sigma E(X_{n+1}) \\ &= E(S_n) + \sigma \frac{E(S_n)}{2+\sigma n} \quad \text{d'après } 7(a) \\ &= \left(1 + \frac{\sigma}{2+\sigma n}\right) E(S_n) \\ &= \left(1 + \frac{\sigma}{2+\sigma n}\right) \frac{2+\sigma n}{2} \quad \text{(HR)} \\ &= \frac{2+\sigma(n+1)}{2} \end{aligned}$$

— Conclusion : par le principe de récurrence, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E(S_n) = \frac{2+\sigma n}{2}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors avec les questions 7.(a) et 7.(b) :

$$P(X_n = 1) = \frac{E(S_{n-1})}{2+\sigma(n-1)} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi X_n suit la loi $\mathcal{B}(1/2)$.