Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DM 5 – À rendre le 03/04/2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats, étapes importantes, ...doivent être mis en valeurs.

Problème 1 – Modèle de diffusion d'Ehrenfest

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux $N \in \mathbb{N}^*$ boules.
À chaque étape, on choisit de façon équiprobable un entier entre 1 et N. Si ce nombre est inférieur ou égal au nombre de boules contenues dans l'urne U_1 alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 ; sinon, on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 à l'étape n. La variable X_0 est donc égale au nombre de boules initialement présentes dans l'urne U_1, la variable X_1 est égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 après un échange, ...

Exemple : si l'urne U_1 contient initialement 3 boules et l'urne U_2 en contient 2 alors $N = 5$ et $X_0 = 3$.
On choisit alors un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 2 alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 et l'on a $X_1 = 2$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 3 alors on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1 et l'on a $X_2 = 3$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. À l'issue de l'échange on aura $X_3 = 2$ avec une probabilité de $\dfrac{3}{5}$ et $X_3 = 4$ avec une probabilité de $\dfrac{2}{5}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = N) \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\forall k \in [\![0, N]\!], \quad Y_{n,k} = \mathbb{P}(X_n = k).$$

Partie 1 – Matrice de transition

1. On suppose, **dans cette question uniquement**, que $N = 2$.

   (a) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Y_{n+1} = A_2 Y_n$ où $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

   Indication : une récurrence n'est pas nécessaire.

   (b) La matrice A_2 est-elle diagonalisable ? *La réponse devra être justifiée.*

Dans la suite $N \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

2. On considère la matrice de $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/N & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 2/N & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dfrac{N-1}{N} & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \dfrac{N-1}{N} & 0 \\ \vdots & & & 0 & 2/N & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1/N & 0 \end{pmatrix}.$$

Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_{n+1} = AY_n$.

Indication : une récurrence n'est pas nécessaire.

3. On note ${}^tA$ la matrice transposée de A.
Déterminer lorsque $N = 2$ et $N = 3$, l'espace propre associé à la valeur propre 1 de ${}^tA$.
4. Prouver que, dans le cas général, la matrice ${}^tA$ possède 1 comme valeur propre.
5. En déduire que la matrice ${}^t(A - I_{N+1})$ est non inversible puis que la matrice A possède 1 comme valeur propre.

Partie 2 – Détermination de l'espérance de la variable aléatoire X_n

Dans la suite $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

6. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire $X_{n+1} - X_n$?
7. En déduire que $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = 1 - \dfrac{2}{N}\mathbb{E}(X_n)$.
Indication : on pourra utiliser le système complet d'événements $([X_n = k])_{k \in [\![0,N]\!]}$.
8. En déduire l'expression de $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et de $\mathbb{E}(X_0)$.
9. On suppose $N > 2$. Déterminer la limite de $\mathbb{E}(X_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et en donner une interprétation.

Partie 3 – Étude de la probabilité stationnaire

On s'intéresse dans cette question à l'espace propre de A associé à la valeur propre 1, que l'on notera E_1.

10. Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in E_1$.
Prouver que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $x_k = \dbinom{N}{k} x_0$.
11. En déduire la dimension de E_1.
12. Calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k}$.

13. Prouver qu'il existe un unique vecteur $\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} \in E_1$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \pi_k = 1$.

On donnera son expression.

14. On considère la variable aléatoire X_∞ telle que :

$$X_\infty(\Omega) = [\![0, N]\!] \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_\infty = k) = \pi_k.$$

Quelle est la loi suivie par X_∞ ? Donner son espérance, sa variance.

15. On suppose que X_0 suit la même loi que X_∞.
Déterminer la loi de X_n pour tout entier n et donner une interprétation.

Problème 2 – D'après G2E 2024

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $(\cdot \mid \cdot)$.

On confondra les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ainsi que les réels et les matrices carrées de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$.

Si A est une matrice, sa transposée est notée A^T. Si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, son orthogonal est noté $E^\perp$.

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$.
L'objectif de ce problème est de démontrer l'appartenance à $S_n^+(\mathbb{R})$ de certaines matrices. La partie 1 est consacrée à l'étude d'exemples en petites dimensions. Dans la partie 2, on fait le lien avec la notion de produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ et dans la partie 3 avec la notion de covariance. Les parties 2 et 3 ne sont pas indépendantes.

Partie 1 – Quelques exemples

1. Préciser, en justifiant, parmi les matrices ci-dessous lesquelles appartiennent à $S_2^+(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}.$$

2. On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices $M(a,b)$ défini par :

$$\mathcal{M} = \{M(a,b) \ , \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{où} \quad M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel engendré par une famille judicieusement choisie.

Justifier que cette famille est libre et en déduire la dimension de $\mathcal{M}$.

(b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer deux vecteurs propres de $M(a,b)$ sous la forme $(1, y, 1)$ (avec $y \in \mathbb{R}$) puis un troisième vecteur propre orthogonal aux deux précédents.

(c) En déduire un réel $r \geq 0$ et une matrice P inversible telle que $P^T = P^{-1}$ et :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad M(a,b) = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a+br & 0 \\ 0 & 0 & a-br \end{pmatrix}.$$

(d) Déterminer une condition nécessaire et suffisante simple portant sur a et b pour que $M(a,b)$ appartienne à $S_3^+(\mathbb{R})$.

Partie 2 – Matrice de Gram

Soit une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note $E = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ et on appelle matrice de Gram de cette famille la matrice G définie par :

$$G = \begin{pmatrix} (e_1|e_1) & (e_1|e_2) & \cdots & (e_1|e_n) \\ (e_2|e_1) & (e_2|e_2) & \cdots & (e_2|e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (e_n|e_1) & (e_n|e_2) & \cdots & (e_n|e_n) \end{pmatrix}.$$

3. **(a)** Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x \in E^\perp \iff (\forall i \in [\![1,n]\!], \quad (x|e_i) = 0).$$

(b) En déduire que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \ker(G) \iff \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E^\perp.$$

(c) En déduire enfin que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre si et seulement si G est une matrice inversible.

4. Dans cette question, on cherche à prouver que $G \in S_n^+(\mathbb{R})$ et on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(a) Calculer le produit matriciel GX et démontrer que $X^T G X = (x'|x')$ où x' est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ à déterminer.

(b) Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(G)$ et X un vecteur propre de G associé à cette valeur propre. En calculant de deux façons $X^T G X$, démonter que $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et conclure.

Partie 3 – Matrice de covariance

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ n variables aléatoires réelles discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telles que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la covariance de X_i et X_j existe. On appelle matrice de covariance de $(X_1, \ldots, X_n)$ la matrice Σ définie par :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(X_1,X_1) & \mathrm{Cov}(X_1,X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1,X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2,X_1) & \mathrm{Cov}(X_2,X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2,X_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_n,X_1) & \mathrm{Cov}(X_n,X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_n,X_n) \end{pmatrix}.$$

5. **(a)** Démontrer que :

$$\forall (i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{Cov}(X_i, X_j + xX_k) = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) + x\mathrm{Cov}(X_i, X_k).$$

(b) En déduire que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{Cov}(X_i, \sum_{j=1}^{n} x_j X_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

6. **(a)** Justifier que Σ est une matrice symétrique réelle.

(b) En s'inspirant de la question 4 de la partie précédente, démontrer que $\Sigma \in S_n^+(\mathbb{R})$.