Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD14

Géométrie euclidienne sur $\mathbb{R}^n$

1 Produit scalaire

Exercice 1. Dans chaque cas, calculer $\langle u, v\rangle$, $\|u\|$ et $\|v\|$.

1. Dans $\mathbb{R}^3$ avec :
$$u = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \quad \text{et} \quad v = (9, -10, 12).$$
2. Dans $\mathbb{R}^4$ avec :
$$u = \left(a+1, a, a-1, 1-2a^2\right) \quad \text{et} \quad v = (a, a-1, a+1, 1)$$
où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soient $u = (1, 1, 2)$, $v = (1, 1, -1)$ et $w = (-1, 1, 0)$.

1. Montrer que (u, v, w) est une base orthogonale.
2. Trouver une base orthonormée (u', v', w') telle que u', v' et w' sont respectivement colinéaires à u, v et w.

Exercice 3 (Identité du parallélogramme). Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Montrer :
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$
2. En déduire que dans un parallélogramme, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

Exercice 4. Soit $a_1, a_2, ..., a_n$ des nombres réels. Montrer que :
$$\left(\frac{a_1 + ... + a_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{a_1^2 + ... + a_n^2}{n}$$

Exercice 5.

1. Soit $x_1, ..., x_n$ des nombres réels strictement positifs. Montrer que :
$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geqslant n^2$$
2. Trouver le minimum de $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$ quand $(x_1, ..., x_n)$ décrit $(\mathbb{R}^{+*})^n$ ainsi que tous les points où ce minimum est atteint.

Exercice 6. Soit $n \geq 2$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2} \geq \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n-k}\right)^2$.

Exercice 7 (Cauchy-Schwartz pour les fonctions). Soit $a < b$ deux réels et $f, g \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :
$$\left|\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) g\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leq \left(\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$
2. En déduire :
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2 Orthogonalité et projection

Exercice 8. L'espace $\mathbb{R}^4$ est muni du produit scalaire canonique. Pour chacun des sous-espaces vectoriels E_i suivants, donner une base de $E_i^{\perp}$.

1. $E_1 = \mathrm{Vect}\left((1,2,0,-1);(0,1,3,2)\right)$.
2. $E_3 = \mathrm{Vect}\left((3,2,0,4);(1,0,0,-2);(1,-1,-1,1)\right)$.
3. $E_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4,\ 2x_1+3x_2-x_4=0\}$.

Exercice 9. On considère une famille de vecteurs unitaires $(e_1,\ldots,e_p)$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{p}\langle e_k, x\rangle^2.$$

1. Montrer que $(e_1,\ldots,e_p)$ est orthonormale.
2. Montrer que c'est une base orthonormée.

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^3$, on se donne trois vecteurs
$$u=(1,1,1) \quad ; \quad v=(1,2,1) \quad ; \quad w=(-1,1,1).$$

On note $F = \mathrm{Vect}(u,v)$.

1. (a) Déterminer la projection orthogonale p_u sur $\mathrm{Vect}(u)$.
   (b) Calculer $p_u(v)$ et montrer que $(u, v-p_u(v))$ est une base orthogonale de F.
   (c) En déduire une base orthonormée de F.
2. (a) Déterminer la projection orthogonale p_F sur F.
   (b) Calculer la distance de w à F.

Exercice 11. Soit $E \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ une matrice de rang r. Soit

$$F = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid EX = 0\}.$$

L'espace F est donc décrit par un système de r équations cartésiennes, indépendantes, chaque ligne de E représentant une ligne d'équation.

1. Quelle est la dimension de F ?
2. Montrer que la matrice $EE^t \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ est inversible.
3. Montrer que $Q = I_n - E^t(EE^t)^{-1}E$ est la matrice de la projection orthogonale sur F relativement à la base canonique.
4. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$d(x,F)^2 = \langle (EE^t)^{-1}EX, EX\rangle$$

et simplifier cette formule dans le cas où les lignes de E forment une famille orthonormée dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 12. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère

$$e_1 = (1,0,1,0) \quad ; \quad e_2 = (0,1,1,0).$$

Soit $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.
2. Montrer que $F = (F^\perp)^\perp$.
3. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $F^\perp$.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x+y-2)^2 + (2x+y-1)^2 + (2x+y-3)^2 + (3x+y-2)^2.$$

Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$.
Indication : on pourra exprimer $f((x,y))$ sous la forme d'une norme au carré.

Exercice 14. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et p_F la projection orthogonale sur F. On note $G = \ker(p_F)$.

1. Montrer que $G = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in F,\ \langle x,y\rangle = 0\}$
2. Soit p_G projection orthogonale sur G.
   (a) Montrer que $p_G = \text{id}_{\mathbb{R}^n} - p_F$.
   (b) Montrer que $F = \ker(p_G)$.
   (c) En déduire que $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in G,\ \langle x,y\rangle = 0\}$.
3. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x = p_F(x) + p_G(x) \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_G(x)\|^2.$$

3 Théorème spectral

Exercice 15. Diagonaliser en base orthonormée :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 16 (Min-max). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On note

$$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

ses valeurs propres (répétées un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre correspond).
Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a :

$$\lambda_1 \|X\|^2 \leq \langle AX, X \rangle \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

Exercice 17. Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
2. Déterminer le noyau K de f puis une équation et une base $\mathcal{B}'$ de $P = K^\perp$.
3. Vérifier que P est stable par f, c'est-à-dire que $f(P) \subset P$.
4. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ de l'endormorphisme de P défini par :

$$\forall x \in P \quad g(x) = f(x).$$

5. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de g.