Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

Mathématiques – TD13

Réduction

1 Produit scalaire

Correction de l'exercice 1.

1. Dans $\mathbb{R}^3$ avec :
$$u = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \quad \text{et} \quad v = (9, -10, 12).$$
On a :
$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{3} \times 9 + \frac{1}{2} \times (-10) + \frac{1}{4} \times 12 = 1.$$
$$\|u\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{61}}{12}.$$
$$\|v\| = \sqrt{9^2 + (-10)^2 + 12^2} = 5\sqrt{13}.$$

2. Dans $\mathbb{R}^4$ avec :
$$u = \left(a+1, a, a-1, 1-2a^2\right) \quad \text{et} \quad v = (a, a-1, a+1, 1)$$
où $a \in \mathbb{R}$.
$$\langle u, v\rangle = a(a+1) + a(a-1) + (a-1)(a+1) + 1 - 2a^2 = a^2$$
$$\|u\| = \sqrt{(a+1)^2 + a^2 + (a-1)^2 + (1-2a^2)^2}$$
$$\|v\| = \sqrt{a^2 + (a-1)^+(a+1)^2 + 1}.$$

Correction de l'exercice 2.

1. On a :
$$\langle u, v\rangle = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times (-1) = 0 \quad ; \quad \langle u, w\rangle = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 2 \times 0 = 0$$
et
$$\langle w, v\rangle = (-1) \times 1 + 1 \times 1 + (-1) \times 0 = 0.$$
La famille est donc orthogonale.
Elle est donc libre et comme elle contient trois vecteurs et que $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. On a :
$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} \quad ; \quad \|v\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$
et $\|w\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$. Donc
$$u' = \frac{1}{\sqrt{6}}u \quad ; \quad v' = \frac{1}{\sqrt{3}}v' \quad ; \quad w' = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
forment une base orthonormée.

Correction de l'exercice 3. 1. On a par bilinéarité :

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle &= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle \\ +\langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$

par symétrie.
De même :

$$\|x-y\|^2 = = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

Donc en additionnant ces deux égalités :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

2. Soit $ABCD$ un parallélogramme et notons $x = \overrightarrow{AB}$ et $y = \overrightarrow{AD}$.
Comme $ABCD$ est un parallélogramme on a :

$$x = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \text{et} \quad y = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

La somme des carrés des longueurs des cotés est donc :

$$AD^2 + BC^2 + DC^2 + AB^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

La somme des carrés des diagonales des cotés est :

$$AC^2 + BD^2.$$

Or

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = x + y$$

et

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -y + x.$$

Ainsi :

$$AC^2 + BD^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2.$$

D'après la question précédente, on a bien la somme des carrés des diagonales qui est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés.

Correction de l'exercice 4. Soit $a_1, a_2, ..., a_n$ des nombres réels. L'inégalité demandée est une application de l'inégalité de Cauchy–Schwarz.
Posons $X = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $Y = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$. On a

$$\langle X, Y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} a_k = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

Par Cauchy–Schwarz, on sait qUE

$$\langle X, Y\rangle^2 \leq \|X\|^2\|Y\|^2$$

et comme

$$\|X\|^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \quad ; \quad \|Y\|^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

il vient

$$\left(\frac{a_1 + ... + a_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{a_1^2 + ... + a_n^2}{n}.$$

Correction de l'exercice 5.

1. Soit $x_1, ..., x_n$ des nombres réels strictement positifs.
   On pose $X = (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$ et $Y = \left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}}\right)$.
   Alors :
   $$\langle X, Y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \times \frac{1}{\sqrt{x_k}} = n$$
   et
   $$\|X\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k \quad ; \quad \|Y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}.$$
   L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit alors
   $$n^2 = \langle X, Y\rangle^2 \leq \|X\|^2\|Y\|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right).$$

2. D'après la question précédente n^2 est un minorant. Montrer qu'il s'agit du minimum.
   Il est clair qu'en prenant tous les x_k égaux (on note x leur valeur commune) on a :
   $$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \frac{n}{x} \times nx = n^2.$$
   Cela montre que n^2 est le minimum recherché et est atteint aux points $(x, \dots, x)$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   Par ailleurs, d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le minimum est atteint si et seulement si X et Y sont liés c'est-à-dire (X et Y étant non nuls) si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$X = \lambda Y$$
   c'est-à-dire
   $$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad x_k = \frac{\lambda}{x^k}.$$
   En particulier : $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad x_k^2 = \lambda$ et comme les x_k sont positifs on en déduit que λ l'est et que tout les x_k sont égaux (à $\sqrt{\lambda}$).
   Ainsi le minimum est atteint uniquement aux points $(x, \dots, x)$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$ quand $(x_1, ..., x_n)$ décrit $(\mathbb{R}^{+*})^n$.

Correction de l'exercice 6. Soit $n \geq 2$.

1. Dans $\mathbb{R}^n$, on pose :

$$X = (1, 2, \dots, n) \quad ; \quad Y = (\sqrt{1}, \dots, \sqrt{n}).$$

Alors

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}$$

$$\|X\|^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et

$$\|Y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\langle X, Y \rangle^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \right)^2 \leq \|X\|^2 \|Y\|^2 = \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{12}.$$

En passant à la racine carrée on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}.$$

2. Dans $\mathbb{R}^{n-1}$, on pose :

$$X = \left(\frac{\sqrt{1}}{n-1}, \frac{\sqrt{2}}{n-2}, \dots, \sqrt{n-1} \right) \quad ; \quad Y = (\sqrt{1}, \dots, \sqrt{n-1}).$$

Alors

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k}$$

$$\|X\|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2} \quad \text{et} \quad \|Y\|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\langle X, Y \rangle^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k} \right)^2 \leq \|X\|^2 \|Y\|^2 = \frac{n(n-1)}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2}.$$

En divisant membre à membre par $\dfrac{n(n-1)}{2}$ on obtient l'inégalité voulue.

Correction de l'exercice 7 (Cauchy-Schwartz pour les fonctions). Soit $a < b$ deux réels et $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :
$$X = \left(f(a), f\left(a + \frac{b-a}{n}\right), \ldots, f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right), f(b)\right)$$
et
$$Y = \left(g(a), g\left(a + \frac{b-a}{n}\right), \ldots, g\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right), g(b)\right).$$
Alors :
$$\langle X, Y\rangle = \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) g\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$
et
$$\|X\| = \left(\sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \|Y\| = \left(\sum_{k=0}^{n} g\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$
En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs X et Y, on obtient l'inégalité voulue.
2. D'après le théorème sur les sommes de Riemann, on sait que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) g\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)^2 = \int_a^b f(t)^2 dt$$
et
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} g\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)^2 = \int_a^b g(t)^2 dt.$$
Ainsi en multipliant membre à membre l'inégalité de la question précédente par $\dfrac{b-a}{n}$ et en faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient :
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2 Orthogonalité et projection

Correction de l'exercice 8.

1. Soit $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a :
$$\begin{aligned}(x,y,z,t) \in E_1^{\perp} &\iff \langle X, (1,2,0,-1)\rangle = \langle X, (0,1,3,2)\rangle = 0 \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x + 2y - t &=& 0 \\ y + 3z + 2t &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 6z + 5t \\ y &=& -3z - 2t \end{array}\right.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$E_1^\perp = \mathrm{Vect}((6,-3,1,0),(5,-2,0,1)).$$

2. Soit $X=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. On a :

$$\begin{aligned}(x,y,z,t)\in E_3^\perp &\iff \langle X,(3,2,0,4)\rangle = \langle X,(1,0,0,-2)\rangle = \langle X,(1,-1,-1,1)\rangle = 0\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 3x+2y+4t &=& 0\\ x-2t &=& 0\\ x-y-z+t &=& 0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2t\\ y &=& -5t\\ z &=& 8t\end{array}\right.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$E_3^\perp = \mathrm{Vect}((2,-5,8,1)).$$

3. $E_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4,\ \langle(2,3,0,-1),(x_1,x_2,x_3,x_4)\rangle = 0\}$.
Donc $\mathrm{Vect}((2,3,0,-1))\subset E_2^\perp$.
On vérifie ensuite facilement que E_2 est de dimension 3 donc $E_2^\perp$ de dimension $4-3=1$.
Ainsi $\mathrm{Vect}((2,3,0,-1)) = E_2^\perp$.

Correction de l'exercice 9. On considère une famille de vecteurs unitaires $(e_1,\dots,e_p)$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^p \langle e_k,x\rangle^2.$$

1. Soit $j\in[\![1,p]\!]$. On a

$$\|e_j\|^2 = \sum_{k=1}^p \langle e_k, e_j x\rangle^2 = \|e_j\|^2 + \sum_{k\neq j}\langle e_k,e_j\rangle^2.$$

est orthonormale.
Ainsi :

$$0 = \sum_{k\neq j}\langle e_k,e_j\rangle^2$$

et donc : $\forall k\neq j : \langle e_k,e_j\rangle = 0$.
La famille est donc orthogonale. Comme les vecteurs sont unitaires, elle est orthonormée.

2. On sait déjà que la famille est libre car orthonormée.
Montrons qu'elle est génératrice.
Il existe donc $z\in\mathbb{R}^n$. On peut écrire :

$$z = x+y$$

avec $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $y \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)^\perp$.
D'après le théorème de Pythagore, on a alors :

$$\|z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}\|z\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle x + y, e_k \rangle^2 &= \sum_{k=1}^{p} (\langle x, e_k \rangle + \langle x, e_k \rangle)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle^2 \quad \text{car } y \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)^\perp \\ &= \|x\|^2.\end{aligned}$$

On en déduit que $\|y\|^2 = 0$ donc $y = 0$ et $z = x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.
Cela montre que $(e_1, \dots, e_p)$ est aussi génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Correction de l'exercice 10. Dans $\mathbb{R}^3$, on se donne trois vecteurs

$$u = (1, 1, 1) \quad ; \quad v = (1, 2, 1) \quad ; \quad w = (-1, 1, 1).$$

On note $F = \mathrm{Vect}(u, v)$.

1. (a) On pose :

$$u' = \frac{u}{\| u \|} = \frac{1}{\sqrt{3}} u.$$

Il s'agit d'un vecteur normé donc d'une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(u)$.
Donc, pour tout (x, y, z) on a

$$p_u((x, y, z)) = \langle (x, y, z), u' \rangle u' = \frac{x + y + z}{3}(1, 1, 1).$$

(b) On a donc :

$$p_u(v) = \frac{4}{3}(1, 1, 1) \quad \text{et} \quad v - p_u(v) = \frac{1}{3}(-1, 2, -1).$$

Par définition de la projection orthogonale ou par un calcul, on a

$$\langle u, v - p_u(v) \rangle = 0$$

si bien que $(u, v - p_u(v))$ est une famille orthogonale donc libre.
Ainsi $(u, v - p_u(v))$ est une famille libre de F de cardinal $2 = \dim(F)$ donc c'est une base de F.

(c) On sait que $(u, v - p_u(v))$ est une base orthogonale. On a déjà vu que $u' = \dfrac{1}{\sqrt{3}} u$ est de norme 1.
De plus $\|v - p_u(v)\|^2 = \dfrac{2}{3}$ donc

$$v' = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}(v - p_u(v)).$$

est de norme 1.
Ainsi (u', v') est une base orthonormée de F.

2. (a) On a pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:
$$\begin{aligned} p_F(x,y,z) &= \langle (x,y,z), u'\rangle u' + \langle (x,y,z), v'\rangle v' \\ &= \frac{x+y+z}{3}(1,1,1) + \frac{-x+2y-z}{6}(-1,2,-1). \end{aligned}$$

   (b) On sait que :
$$d(w, F) = \|w - p_F(w)\|.$$
Avec la question précédente :
$$p_F(w) = \frac{1}{3}(1,1,1) + \frac{1}{3}(-1,2,-1) = (0,1,0)$$
puis
$$w - p_F(w) = (-1,1,1) - (0,1,0) = (-1,0,1).$$
Finalement
$$d(w,F) = \|w - p_F(w)\| = \|(-1,0,1)\| = \sqrt{2}.$$

Correction de l'exercice 11.

1. Le sous-espace vectoriel F est le noyau de E, par le théorème du rang on a donc :
$$\dim F = n - rg(E) = n - r.$$
2. La matrice E est de taille $r \times n$, la matrice E^t est donc de taille $n \times r$ et la matrice EE^t est donc carrée, de taille $r \times r$.
Pour prouver qu'elle est inversible, il suffit de montrer que son noyau est réduit au vecteur nul.
Soit $Y \in \ker(EE^t)$. On a
$$\begin{aligned} 0 = \langle EE^tY, Y\rangle &= (EE^tY)^tY \\ &= Y^tEE^tY \\ &= \langle E^tY, E^tY\rangle \\ &= \|E^tY\|^2. \end{aligned}$$
Ainsi $E^tY = 0$ et $Y \in \ker(E^t)$.
Or E et sa transposée ont même rang r, par le théorème du rang $\ker(E^t) \subset \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ est de dimension 0 et donc $Y = 0$, ce que l'on cherchait.
La matrice EE^t est donc inversible.
3. Soit $Q = I_n - E^t(EE^t)^{-1}E$.
   — On a $Q^2 = Q$.
   — Montrons que $\mathrm{Im}(Q) = F$.
   (a) Soit $Y \in \mathrm{Im}(Q)$ alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:
$$Y = X - E^t(EE^t)^{-1}EX$$
et
$$EY = EX - \underbrace{EE^t(EE^t)^{-1}}_{I_r}EX = EX - EX = 0.$$
et donc $Y \in F$.

(b) Réciproquement, si $Y \in F$, $EY = 0$ et donc $Y = QY$ et $Y \in \mathrm{Im}(Q)$.

— Montrons $\ker(Q) = F^\perp$.

(a) Soit $X \in \ker(Q)$ et $Y \in F$. On a :

$$QX = X - E^t(EE^t)^{-1}EX = 0$$

donc

$$E^t(EE^t)^{-1}EX = X.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}\langle X, Y\rangle = X^tY &= (E^t(EE^t)^{-1}EX)^tY \\ &= X^tE^t(E^tE)^{-1}EY \\ &= 0 \quad \text{car } EY = 0.\end{aligned}$$

$X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$Y = X - E^t(EE^t)^{-1}EX$$

et

$$EY = EX - \underbrace{EE^t(EE^t)^{-1}}_{I_r}EX = EX - EX = 0.$$

et donc $Y \in F$.

Cela montre que $\ker(Q) \subset F^\perp$.

(b) Par le théorème du rang on a :

$$\dim(\ker(Q)) = n - \dim(\mathrm{Im}(Q)) = n - \dim(F) = \dim(F^\perp).$$

Ainsi $\ker(Q) = F^\perp$.

D'après la caractérisation de la projection orthogonale sur F on a donc

$$p_F : X \longmapsto QX$$

ce qui entraine que Q est la matrice de p_F dans la base canonique.

4. Soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned}d(X,F)^2 &= \|X - Q.X\|^2 \\ &= \|E^t(EE^t)^{-1}EX\|^2 \\ &= (E^t(EE^t)^{-1}EX)^tE^t(EE^t)^{-1}EX \\ &= X^tE^t(EE^t)^{-1}EX \\ &= ((EE^t)^{-1}EX)^tEX \\ &= \langle (EE^t)^{-1}EX, EX\rangle.\end{aligned}$$

Si les lignes de E forment une famille orthonormée alors $EE^t = I_r$ et donc

$$d(x,F)^2 = \langle EX, EX\rangle = \|EX\|^2$$

Correction de l'exercice 12. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère

$$e_1 = (1,0,1,0) \quad ; \quad e_2 = (0,1,1,0).$$

Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

1. Il y a plusieurs façon de faire.

— **Méthode 1 : trouver une bon de F et utiliser l'expression de la projection.**

Comme $\|e_1\| = \sqrt{2}$ alors $e_1' = \dfrac{1}{\sqrt{2}} e_1$ est normé et (e_1', e_2) est encore une base de F.

On cherche ensuite un vecteur $e_2' \in F$ orthogonal à e_1'. Pour un tel élément de F il existe a, b des réels tels que :

$$e_2' = a e_1' + b e_2.$$

Donc

$$\langle e_2', e_1' \rangle = 0 \iff a + b\langle e_2, e_1' \rangle = 0 \iff a + \frac{b}{\sqrt{2}} = 0.$$

Ainsi en prenant $a = 1$ et $b = -\sqrt{2}$ on a :

$$e_2' = e_1' - \sqrt{2} e_2$$

qui est orthogonale à e_1' (et dans F).

La famille $\left(e_1', \dfrac{e_2'}{\|e_2\|}\right)$ est une base orthonormée de F.

Maintenant, d'après le cours, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$p_F(x, y, z, t) = \langle (x, y, z, t), e_1' \rangle e_1' + \langle (x, y, z, t), e_2' \rangle e_2'.$$

Après calculs, cela donne :

$$p_F(x, y, z, t) = \left(\frac{2x + z - y}{3}, \frac{-x + 2y + z}{3}, \frac{x + y + 2z}{3}, 0 \right).$$

— **Méthode 2 : utiliser la définition de la projection.** Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Par définition :

$$\begin{aligned}
(a, b, c, d) = p_F(x, y, z, t) &\iff \begin{cases} (a, b, c, d) \in F \\ (x, y, z, t) - (a, b, c, d) \in F^{\perp} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (a, b, c, d) \in F \\ \langle (x, y, z, t) - (a, b, c, d), e_1 \rangle = 0 \\ \langle (x, y, z, t) - (a, b, c, d), e_2 \rangle = 0 \end{cases} \\
&\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ \begin{cases} (a, b, c, d) = \lambda e_1 + \mu e_2 \\ \langle (x, y, z, t) - (a, b, c, d), e_1 \rangle = 0 \\ \langle (x, y, z, t) - (a, b, c, d), e_2 \rangle = 0 \end{cases} \\
&\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ \begin{cases} (a, b, c, d) &= (\lambda, \mu, \lambda + \mu, 0) \\ x - a + z - c &= 0 \\ y - b + z - c &= 0 \end{cases} \\
&\iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \ \begin{cases} d &= 0 \\ c &= a + b \\ x - a + z - c &= 0 \\ y - b + z - c &= 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, en n'oubliant pas que les inconnues sont a, b, c, d :

$$(a,b,c,d) = p_F(x,y,z,t) \iff \begin{cases} d &= 0 \\ c &= a+b \\ x-2a+z-b &= 0 \\ y-2b+z-a &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d &= 0 \\ c &= a+b \\ b &= x+z-2a \\ y-2(x+z-2a)+z-a &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d = 0 \\ c = \dfrac{x+y+2z}{3} \\ b = \dfrac{-x+2y+z}{3} \\ a = \dfrac{2x-y+z}{3} \end{cases}$$

On obtient

$$p_F(x,y,z,t) = \left(\frac{2x+z-y}{3}, \frac{-x+2y+z}{3}, \frac{x+y+2z}{3}, 0\right)$$

et la matrice recherchée est donc

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrons que $F \subset (F^\perp)^\perp$. Soit $x \in F$ et $y \in F^\perp$.
   Par définition de $F^\perp$, on a donc $\langle x, y\rangle = 0$. Ainsi x est orthogonal à tous les éléments de $F^\perp$.
   Cela montre : $F \subset (F^\perp)^\perp$.
   Par ailleurs :
   $$\dim((F^\perp)^\perp) = n - \dim(F^\perp) = n - (n - \dim(F)) = \dim(F).$$
   Donc par égalité des dimensions : $F \subset (F^\perp)^\perp$.
3. On peut procéder comme à la question ou remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}^4$:
   $$x = p_F(x) + x - p_F(x)$$
   où $x - p_F(x) \in F^\perp$ et $p_F(x) \in F = (F^\perp)^\perp$. Cela signifie que :
   $$p_{F^\perp}(x) = x - p_F(x).$$
   La matrice recherchée est alors :
   $$I_4 - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 13. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+y-2)^2 + (2x+y-1)^2 + (2x+y-3)^2 + (3x+y-2)^2 \\ &= \|(x+y-2, 2x+y-1, 2x+y-3, 3x+y-2)\|^2 \\ &= \|(x+y, 2x+y, 2x+y, 3x+y) - (2,1,3,2)\|^2. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) &= \inf\{\|(x+y, 2x+y, 2x+y, 3x+y) - (2,1,3,2)\|^2 \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= d(F, (2,1,3,2))^2 \end{aligned}$$

où

$$F = \{(x+y, 2x+y, 2x+y, 3x+y); (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,2,2,3),(1,1,1,1)).$$

Ainsi :

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \|(2,1,3,2) - p_F((2,1,3,2))\|^2.$$

Il suffit donc de déterminer le projeté orthogonal de $(2,1,3,2)$ sur F c'est-à-dire l'unique vecteur (a,b,c,d) tel que :

$$(a,b,c,d) \in F \quad ; \quad \langle (2,1,3,2)-(a,b,c,d), (1,2,2,3)\rangle = \langle (2,1,3,2)-(a,b,c,d), (1,1,1,1)\rangle = 0.$$

Cela équivaut à :

$$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \left\{ \begin{array}{ccc} (a,b,c,d) & = & (x+y, 2x+y, 2x+y, 3x+y) \\ 2-a+2(1-b)+2(3-c)+3(2-d) & = & 0 \\ 2-a+1-b+3-c+2-d & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \left\{ \begin{array}{ccc} (a,b,c,d) & = & (x+y, 2x+y, 2x+y, 3x+y) \\ 18x+8y & = & 16 \\ 8x+4y & = & 8 \end{array} \right.$$

$$\iff \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 \left\{ \begin{array}{ccc} (a,b,c,d) & = & (x+y, 2x+y, 2x+y, 3x+y) \\ x & = & 0 \\ y & = & 2 \end{array} \right.$$

Ainsi :

$$p_F((2,1,3,2)) = (2,2,2,2).$$

Le minimum de f est donc atteint pour $(x,y) = (0,2)$ et vaut $f(0,2) = 2$.

Correction de l'exercice 14.

1. Soit
$$G' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in F, \ \langle x, y\rangle = 0\}.$$
Montrons par double inclusion que $G = G'$.

— Soit $x \in G$, on a alors $p_F(x) = 0$. Si $y \in F$, on a par définition de la projection orthogonale sur F :
$$\langle x - p_F(x), y\rangle = 0$$
et donc, par linéarité du produit scalaire relativement à sa première variable,
$$\langle x, y\rangle - \langle p_F(x), y\rangle = 0 \quad \text{càd} \quad \langle x, y\rangle = 0.$$
On a donc montré que $x \in G'$.

— Réciproquement, si $x \in G'$. Par définition de la projection orthogonale sur F, $p_F(x) \in F$ et
$$\langle x - p_F(x), p_F(x)\rangle = 0.$$
Or $x \in G'$ donc : $\langle x, p_F(x)\rangle = 0$.
Ainsi par linéarité :
$$\langle p_F(x), p_F(x)\rangle = 0 \quad \text{càd} \quad \|p_F(x)\|^2 = 0.$$
Donc $p_F(x) = 0$ et $x \in G$.

2. (a) Soit p_G la projection orthogonale sur G et $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - p_F$. Montrons que $p_G = f$ en utilisant la définition de la projection orthogonale sur G.
   — Déjà, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
   — Soit $x \in \mathbb{R}^n$, montrons que $f(x) \in G$ en utilisant la question précédente. Soit $y \in F$, on a
   $$\langle f(x), y\rangle = \langle x - p_F(x), y\rangle = 0$$
   par définition de $p_F(x)$.
   — Soit $x \in \mathbb{R}^n$, montrons que $x - f(x) \in G^\perp$. Soit $y \in G$; on a :
   $$\langle x - f(x), y\rangle = \langle p_F(x), y\rangle = 0$$
   car $p_F(x) \in F$ et $y \in G$ (cf question précédente).

   Ces trois points caractérisant la projection orthogonale sur G, on a $f = p_G$.

   (b) Vérifions maintenant que $F = \ker(p_G)$.
   — Soit $x \in \ker(p_G) = \ker(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - p_F)$. On a
   $$p_G(x) = x - p_F(x) = 0$$
   et donc $x = p_F(x)$, d'où $x \in F$.
   — Réciproquement, si $x \in F$ alors $p_F(x) = x$ et donc $p_G(x) = 0$ et finalement $x \in \ker(p_G)$.

   (c) Par la question 1, appliquée à G, on a
   $$F = \ker(p_G) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in G,\ \langle x, y\rangle = 0\}.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a, d'une part
$$x = p_F(x) + x - p_F(x) = p_F(x) + (\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - p_F)(x) = p_F(x) + p_G(x)$$
et d'autre part, $\langle p_F(x), p_G(x)\rangle = 0$ (car si $y \in F, y' \in G$, $\langle x, y\rangle = 0$) et donc par Pythagore :
$$\|x\|^2 = \|p_F(x) + p_G(x)\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|p_G(x)\|^2.$$

3 Théorème spectral

Correction de l'exercice 15.

1. Commençons par une recherche de valeurs propres pour la matrice A. On a bien sûr remarqué que la matrice A est symétrique réelle et donc l'existence du matrice réelle P, orthogonale (telle que $P^tP = I_3$ diagonalisant A est assurée théoriquement.
   On a
   $$A - \lambda.I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
   Par l'algorithme du pivot de Gauss, les matrices suivantes ont même rang que A
   $$\begin{aligned} rg(A-\lambda I_3) &= rg\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 1-\lambda & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftrightarrow L_1) \\ &= rg\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-(1-\lambda)^2 \end{pmatrix} \quad (L_3 \leftarrow 2L_3 - (1-\lambda)L_1). \end{aligned}$$
   Le nombre λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_3$ est non inversible, c'est-à-dire en le lisant sur la dernière matrice issue de l'échelonnement, si et seulement si $\lambda = 3$ ou $\lambda = -1$. (Noter que la condition $\lambda = -1$ arrive « doublement », ce qui va probablement nous mener à un espace propre associé de dimension 2). On a donc
   $$\mathrm{Spec}A = \{-1, 3\}.$$
   Déterminons maintenant une base des sous-espaces propres E_{-1} et E_3 de A.
   - Pour $\lambda = 3$. En reprenant l'échelonnement fait auparavant (noter que l'on a agit que sur les lignes et donc cet échelonnement est aussi valable pour le calcul du noyau $(A - \lambda.I_3)$, on obtient que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3$ si et seulement si
     $$\begin{cases} 2x - 2z &= 0 \\ -4y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$
     si et seulement si
     $$\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x &= t \\ y &= 0 \\ z &= t \end{cases}$$
     et donc
     $$E_3 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   - Pour $\lambda = -1$. En agissant de même, on obtient que $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1}$ si et seulement si
     $$\begin{aligned} 2x + 2z &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

si et seulement si

$$\exists s,t\in\mathbb{R},\quad \begin{array}{rcl} x & = & -t \\ y & = & s \\ z & = & t \end{array}$$

et donc

$$E_{-1}=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

La matrice $P_0=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ est inversible, elle est de taille 3×3 et ses 3 colonnes sont composées par la juxtaposition de bases des deux sous espaces propres. On a

$$P_0^{-1}AP_0=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Ce n'est cependant pas la réponse cherchée car P_0 n'est pas orthogonale. On remarque que les colonnes de P_0 sont deux à deux orthogonales (ce qui n'est pas donné d'avance car les deux dernières colonnes forment une base de E_{-1}), il suffit donc de normaliser (au sens euclidien) les colonnes de P_0 pour obtenir que

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

est orthogonale, ses colonnes formant une BON de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A et on a

$$P^{-1}AP=P^tAP=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

2. Pour diagonaliser dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ la matrice $A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$, ce qui est possible car A est symétrique réelle, on remarque que $A=J-I_4$ où J est la matrice 4×4 ne contenant que des 1.
La matrice J, de rang évidemment 1 est (et c'est un classique) diagonalisable avec pour spectre

$$\mathrm{Spec}(J)=\{4,0\}$$

avec de plus

$$E_4(J)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right)\quad\text{et}\quad E_0(J)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4,\ x+y+z+t=0\right\}.$$

Diagonaliser A en base orthonormée revient à diagonaliser J en base orthonormée et la difficulté est d'obtenir une base orthonormée de $E_0(J)$.
Si on résout de la manière usuelle, on obtient que

$$E_0(J) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

La base de $E_0(J)$ ainsi exhibée n'est pas orthogonale et il faudrait l'orthonormaliser avec un procédé officiellement hors-programme. Essayons plutôt d'être malin et de jouer sur les symétries. On cherche trois vecteurs orthogonaux tels que la somme de leurs coordonnées fait 0. Essayons :

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

sont deux premiers bons candidats et en y ajoutant $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, le compte y est ! Il suffit maintenant de les normer au sens euclidien du terme pour obtenir (n'oublions pas de le faire aussi pour la base trouvée de $E_4(J)$), que

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

est orthogonale et

$$P^t J P = \begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^t(J-I_4)P = \begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 16. Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable en base orthonormée : il existe une base orthonormée $(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres et, quitte à changer l'ordre des vecteurs, on peut considérer que X_i est une vecteur propre associé à λ_i.
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base, il existe $(a_1, \ldots, a_n)$ des réels tels que :

$$X = \sum_{k=1}^{n} a_i X_i$$

et
$$AX = \sum_{k=1}^{n} a_i AX_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i a_i X_i.$$
Ainsi, par bilinéarité du produit scalaire on a :
$$\langle AX, X\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i a_i a_j \langle X_i, X_j\rangle.$$
La famille $(X_1, \ldots, X_n)$ étant orthonormé, le produit scalaire $\langle X_i, X_j\rangle$ vaut 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$. D'où :
$$\langle AX, X\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^2.$$
En utilisant que : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$, on obtient :
$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \langle AX, X\rangle \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$
Pour conclure, il reste à remarquer que :
$$\|X\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \|X_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$
puisque la base $(X_1, \ldots, X_n)$ est orthonormée.

Correction de l'exercice 17. Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.

1. La matrice A est diagonalisable car symétrique réelle donc$f$ est diagonalisable.
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$f(x, y, z) = (0, 0, 0) \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 11x - 5y + 5z & = & 0 \\ -5x + 3y - 3z & = & 0 \\ 5x - 3y + 3z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 11x - 5y + 5z & = & 0 \\ -5x + 3y - 3z & = & 0 \end{array} \right.$$

En remplaçant L_1 par $3L_1 + 5L_2$ on obtient
$$f(x, y, z) = (0, 0, 0) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & z \end{array} \right.$$
Ainsi : $K = \mathrm{Vect}((0, 1, 1))$.
Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :
$$(x, y, z) \in K^{\perp} \iff \langle (x, y, z), (0, 1, 1)\rangle = 0 \iff z + y = 0.$$
Ainsi P est le plan d'équation $y + z = 0$ et on peut prendre comme base $\mathcal{B}'$:
$$((1, 0, 0), (0, -1, 1)).$$

3. Il suffit de montrer que $f((1,0,0))$ et $f((0,-1,1))$ sont dans P puis la linéarité de f et stabilité de P par combinaisons linéaires permettent d'en déduire automatiquement que $f(P) \subset P$.
   On a :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f((1,0,0))) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$
   donc $f((1,0,0)) = (11,-5,5) = 11(1,0,0) + 5(0,-1,1) \in P$.
   De même :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f((0,-1,1))) = A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$
   donc $f((0,-1,1)) = (10,-6,6) = 10(1,0,0) + 6(0,-1,1) \in P$.
4. D'après la question précédente la matrice recherchée est :
   $$B = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$
5. Avec le déterminant : soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   $$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Spec}(B) \Leftrightarrow \det(B - \lambda I_2) = 0 &\Leftrightarrow (11-\lambda)(6-\lambda) - 50 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 16. \end{aligned}$$
   Ainsi $\mathrm{Spec}(B) = \{1, 16\}$.
   on trouve ensuite :
   $$E_1(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{16}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$
   Pour approfondir, on peut remarquer qu'alors les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ sont $(1,1)$ et $(2,-1)$ sont des vecteurs propres de f pour les valeurs propres 1 et 16.