Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

**Mathématiques – TD15**

**Théorèmes limites en probabilité**

# 1 Autour de la loi des grands nombres

**Exercice 1.** Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in ]0,1[$. Pour tout $n \geq 1$, on note

$$Y_n = X_n X_{n+1}.$$

1. Pour $n \geq 1$, donner la loi de $Y_n$, $\mathbb{E}(Y_n)$, $\mathbb{V}(Y_n)$.
2. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$.
3. Soit $S_n = \dfrac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$ pour $n \geq 1$. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$,
$$\mathbb{P}(|S_n - p^2| > \epsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

**Exercice 2.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p = \dfrac{1}{6}$. On lance $n$ fois un dé équilibré et on considère $S_n$ le nombre de fois où 6 est sorti durant les $n$ premiers tirages. On pose $Y_n = \exp\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$.

1. Calculer l'espérance et la variance de $Y_n$.
2. Prouver : $\mathbb{E}(Y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^p$ et $\mathbb{V}(Y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, lorsque $n \to +\infty$,
$$\mathbb{P}(|Y_n - e^p| < \epsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

**Exercice 3.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variable aléatoire suivant la même loi qu'une variable $X$. On suppose que $X$ admet un moment centré d'ordre 4, $\mu_4 = \mathbb{E}((X-\mu)^4)$ où $\mu = \mathbb{E}(X)$.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$, l'espérance empirique et la variance empirique non-biaisée du $N$-échantillon $(X_n)_{1\leq n\leq N}$ sont définies respectivement par :

$$M_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n \quad \text{et} \quad \Sigma_N^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(X_n - M_N)^2.$$

1. Montrer que $\mathbb{E}(\Sigma_N^2) = \mathbb{V}(X)$.
2. On admet que
$$\mathbb{V}(\Sigma_N^2) = \frac{1}{N}\mu_4 - \frac{(N-3)}{N(N-1)}\mathbb{V}(X)^2.$$
Montrer que pour tout $\epsilon > 0$,
$$\mathbb{P}(|\Sigma_N^2 - \mathbb{V}(X)| > \epsilon) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$
3. (Facultatif) Démontrer la formule admise en 2.

## 2 Convergence en loi

**Exercice 4.**

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}([0,1])$.
   (a) Montrer que $(\max(X_1,\dots,X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi certaine.
   (b) Montrer que $(\min(X_1,\dots,X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi certaine.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right)$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(e^{-1})$.
3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]\right)$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

**Exercice 5.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, exprimer $F_{X_n}$ en fonction la fonction de répartition $\Phi$ d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(t)=1$ si $t>0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{X_n}(t)=0$ si $t<0$.
3. En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une loi certaine.

**Exercice 6.** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $X_n\hookrightarrow\mathcal{U}(\llbracket 0,n\rrbracket)$. On pose $Y_n=\dfrac{X_n}{n}$.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition $F_{Y_n}$.
2. Soit $x\in\mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x)$.
3. En déduire que $(Y_n)_n$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

**Exercice 7.**

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $X_n\hookrightarrow\mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\right)$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable à déterminer.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $X_n\hookrightarrow\mathcal{P}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable de loi certaine égale à 0.

## 3 Théorème central limite

**Exercice 8.** On considère trois variables aléatoires $X$, $Y$ et $Z$ mutuellement indépendantes et suivant toutes les trois la loi binomiale $\mathcal{B}(10,\frac{1}{2})$.

On pose $R=\dfrac{1}{3}(X+Y+Z)$.

1. Quelle est la loi de $X+Y+Z$ ?
2. Soit $\Phi$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On donne $\Phi\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right) \simeq 0,86$. Donner une valeur approchée de $P(R \geq 4)$.

**Exercice 9.** On considère 1000 variables aléatoires $T_1, \ldots, T_{1000}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes la même loi, indépendantes, ayant une espérance égale à 3 et une variance égale à $\frac{1}{2}$.

On pose $S = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} T_i$.

On note $\Phi$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et on donne la valeur approchée $\Phi(\sqrt{5}) \simeq 0,978$.

Donner une valeur approchée de $\mathbb{P}(2,95 < S \leq 3,05)$.

**Exercice 10.** On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad u_n = e^{-n}\sum_{i=1}^{n} \frac{n^i}{i!}.$$

1. Donner la loi de $S_n$, son espérance et sa variance.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $u_n$ à l'aide de la variable $S_n$.
3. En déduire, en appliquant le théorème central limite, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possède une limite et la déterminer.

**Exercice 11.** Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune la loi uniforme sur $[0,1]$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Quelle est la limite (si elle existe) quand $n \to +\infty$ de $\mathbb{P}\left(\frac{n}{2} - \sqrt{n} < S_n \leq \frac{n}{2} + \sqrt{n}\right)$ ?

**Exercice 12.** Soit $X$ une variable aléatoire réelle de carré intégrable, d'espérance nulle et de variance $\sigma^2 > 0$.

On suppose que si $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes, de même loi que $X$ alors $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}}$ suit également la loi de $X$.

1. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires de même loi que $X$ et indépendantes. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\sum_{k=1}^{2^n} X_k}{\sqrt{2^n}}$ suit la loi de $X$.
2. Montrer en utilisant le TCL que $X$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

## 4 Tests

**Exercice 13.** On suppose qu'une naissance (d'être humain) est une expérience aléatoire dont la caractéristique $X$ première est le fait d'obtenir un garçon ou une fille. On obtient une fille (succès !) avec probabilité $p$ et un garçon (échec !) avec probabilité $q = 1-p$ :

$$\mathbb{P}(X=1) = p \quad ; \quad \mathbb{P}(X=0) = q = 1-p.$$

En 2016 selon l'INSEE, sur les 746977 naissances, 364 392 sont des femmes et 382 585 des hommes. L'hypothèse $(H_0) : p = \dfrac{1}{2}$ est-elle conforme au niveau de confiance 95% avec l'observation ?

**Exercice 14.** Chez des sujets normaux, le dosage de l'activité d'une enzyme suit une loi normale d'espérance 10.7 et d'écart-type 2.7.
Une série de dosages effectuées sur une même personne a donné :

$$12.9 - -8.7 - -9.0 - -1.2 - -2.7 - -9.7 - -9.1 - -10.3$$

Cette personne a-t-elle un dosage normal ?