Lycée Pierre-Gilles de Gennes 2024-2025

BCPST2 – Mathématiques

DM 5 – À rendre le 03/04/2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les résultats, étapes importantes, ...doivent être mis en valeurs.

Problème 1 – Modèle de diffusion d'Ehrenfest

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux $N \in \mathbb{N}^*$ boules.
À chaque étape, on choisit de façon équiprobable un entier entre 1 et N. Si ce nombre est inférieur ou égal au nombre de boules contenues dans l'urne U_1 alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 ; sinon, on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 à l'étape n. La variable X_0 est donc égale au nombre de boules initialement présentes dans l'urne U_1, la variable X_1 est égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 après un échange, ...

Exemple : si l'urne U_1 contient initialement 3 boules et l'urne U_2 en contient 2 alors $N = 5$ et $X_0 = 3$.
On choisit alors un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 2 alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 et l'on a $X_1 = 2$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 3 alors on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1 et l'on a $X_2 = 3$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. À l'issue de l'échange on aura $X_3 = 2$ avec une probabilité de $\frac{3}{5}$ et $X_3 = 4$ avec une probabilité de $\frac{2}{5}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = N) \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\forall k \in [\![0, N]\!], \quad Y_{n,k} = \mathbb{P}(X_n = k).$$

Partie 1 – Matrice de transition

1. On suppose, **dans cette question uniquement**, que $N = 2$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$, on a pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}_{[X_n=0]}(X_{n+1} = k)\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}_{[X_n=1]}(X_{n+1} = k)\mathbb{P}(X_n = 1) \\ + \mathbb{P}_{[X_n=2]}(X_{n+1} = k)\mathbb{P}(X_n = 2).\end{aligned}$$

— Si $[X_{n+1}=0]$, c'est forcément qu'à l'étape précédente on avait une boule qu'on a retirée et donc que le nombre choisit valait 1. Ainsi

$$P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=0)=P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=0)=0 \quad ; \quad P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=0)=\frac{1}{2}.$$

D'où

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=0)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=1).$$

— Si $[X_{n+1}=1]$, c'est qu'à l'étape précédente soit qu'on avait deux boules auquel cas on en retire une avec probabilité 1, soit qu'on avait aucune boule auquel cas on en ajoute une avec probabilité 1. Ainsi

$$P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=1)=P_{[X_n=2]}(X_{n+1}=1)=1 \quad ; \quad P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=1)=0.$$

D'où

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=1)=\mathbb{P}(X_n=0)+\mathbb{P}(X_n=2).$$

Si $[X_{n+1}=2]$, c'est qu'à l'étape précédente on avait une boule et qu'on en a ajouté une. Le nombre choisit doit alors être 2 ce qui arrive avec probabilité 1/2. Ainsi

$$P_{[X_n=0]}(X_{n+1}=2)=P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=2)=0 \quad ; \quad P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=2)=\frac{1}{2}.$$

D'où

$$\mathbb{P}(X_{n+1}=2)=\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n=1).$$

Ainsi, on a bien $Y_{n+1}=A_2Y_n$ où $A_2=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$.

(b) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
rg(A_2-\lambda I_3)=rg\begin{pmatrix}-\lambda & 1/2 & 0\\ 1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1/2 & -\lambda\end{pmatrix} &= rg\begin{pmatrix}1 & -\lambda & 1\\ -\lambda & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & -\lambda\end{pmatrix} \quad (L_1\leftrightarrow L_2)\\
&= rg\begin{pmatrix}1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1/2-\lambda^2 & \lambda\\ 0 & 1/2 & -\lambda\end{pmatrix} \quad (L_2\leftarrow L_2+\lambda L_1)\\
&= rg\begin{pmatrix}1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1/2-\lambda^2 & \lambda\\ 0 & 1-\lambda^2 & 0\end{pmatrix} \quad (L_3\leftarrow L_3+\lambda L_2)\\
&= rg\begin{pmatrix}1 & 1 & -\lambda\\ 0 & \lambda & 1/2-\lambda^2\\ 0 & 0 & 1-\lambda^2\end{pmatrix} \quad (C_3\Leftrightarrow C_2)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lambda\in\mathrm{Spec}(A_2)\Longrightarrow rg(A_2-\lambda I_3)<3_{\Leftarrow}\Rightarrow \lambda=0 \quad \text{ou} \quad 1-\lambda^2=0.$$

Donc $\mathrm{Spec}(A_2) = \{-1, 0, 1\}$.

Comme A_2 est une matrice 3×3 avec trois valeurs propres distinctes alors A_2 est diagonalisable.

Dans la suite $N \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = i])_{i \in [\![0,N]\!]}$, on a pour tout $k \in [\![0, N]\!]$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{N} \mathbb{P}_{[X_n=i]}(X_{n+1} = k)\mathbb{P}(X_n = i).$$

Or, d'une étape à l'autre soit on ajoute une boule soit on retire une boule donc :

— si $[X_{n+1} = 0]$, c'est forcément qu'à l'étape précédente on avait une boule qu'on a retirée et donc que le nombre choisit valait 1. Ainsi

$$\forall i \in [\![0, N]\!], \quad P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = 0) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

D'où

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{N}\mathbb{P}(X_n = 1).$$

Or $\dfrac{1}{N}\mathbb{P}(X_n = 1)$ correspond bien au premier coefficient de AY_n.

— Si $[X_{n+1} = k]$ avec $k \in [\![1, N-1]\!]$, c'est qu'à l'étape précédente soit qu'on avait $k-1$ boules et qu'on en a ajoutée une (cela arrive si l'on tire une nombre entre k et N) soit qu'on avait $k+1$ boules et qu'on en a retirée une (cela arrive si l'on tire une nombre entre 1 et $k+1$,). Ainsi

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(X_n = k-1) + \frac{k+1}{N}\mathbb{P}(X_n = k+1).$$

Or $\dfrac{N-k+1}{N}\mathbb{P}(X_n = k-1) + \dfrac{k+1}{N}\mathbb{P}(X_n = k+1)$ correspond bien au $k+1$-ième coefficient de AY_n.

— Si $[X_{n+1} = N]$, c'est qu'à l'étape précédente on avait $N-1$ boule et qu'on en a ajouté une. Le nombre choisit doit alors être N ce qui arrive avec probabilité $1/N$. Ainsi

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = N) = \frac{1}{N}\mathbb{P}(X_n = N-1).$$

Or $\dfrac{1}{N}\mathbb{P}(X_n = N-1)$ correspond bien au $N+1$-ième coefficient de AY_n.

On obtient bien $Y_{n+1} = AY_n$ avec la matrice de $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/N & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 2/N & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dfrac{N-1}{N} & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \dfrac{N-1}{N} & 0 \\ \vdots & & & 0 & 2/N & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1/N & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Pour $N = 2$, il s'agit de la transposée de la matrice A_2 de la question 1 :

$$^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$X \in E_1(^tA) \iff \begin{cases} y & = x \\ \frac{1}{2}(x+z) & = y \\ y & = z \end{cases} \iff x = y = z.$$

Ainsi $E_1(^tA) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Pour $N = 3$, on a :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad ^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$:

$$X \in E_1(^tA) \iff \begin{cases} y & = x \\ 1/3x + 2/3z & = y \\ 2/3y + 1/3t & = z \\ z & = t \end{cases} \iff x = y = z = t.$$

Ainsi $E_1(^tA) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

4. Il suffit de vérifier que

$$^tA \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cela montrera que 1 est valeur propre de ^tA et que $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

Il s'agit d'un simple calcul.

On peut aussi remarquer ${}^tA\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ donne le vecteur dont les coordonnées sont la somme des coefficients de chaque ligne de ${}^tA$ donc de chaque colonne de A.

5. La matrice ${}^t(A-I_{N+1}) ={}^t A-I_{N+1}$ est non inversible d'après la question précédente. Or $A-I_{N+1}$ est de même rang que sa transposée ${}^t(A-I_{N+1})$ et comme cette dernière est non-inversible son rang est strictement inférieur à $N+1$. Par conséquent $A-I_{N+1}$ est non inversible ce qui est équivalent à dire que 1 est une valeur propre de A.

Partie 2 – Détermination de l'espérance de la variable aléatoire X_n

Dans la suite $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

6. À chaque étape, soit on ajoute une boule dans l'urne soit on retire une boule. Donc la variable aléatoire $X_{n+1} - X_n$ ne peut prendre que les valeurs -1 et 1.

7. On a donc :

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) - \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1).$$

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = k])_{k\in[\![0,N]\!]}$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) &= \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) - \mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1)\\
&= \sum_{k=0}^{N}(\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} - X_n = 1) - \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} - X_n = -1))\mathbb{P}(X_n = k)\\
&= \sum_{k=0}^{N}(\mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k+1) - \mathbb{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k-1))\mathbb{P}(X_n = k)\\
&= \mathbb{P}(X_n = 0) + \sum_{k=1}^{N-1}(\frac{N-k}{N} - \frac{k}{N})\mathbb{P}(X_n = k) - \mathbb{P}(X_n = N)\\
&= \mathbb{P}(X_n = 0) + \sum_{k=1}^{N-1}(1 - \frac{2k}{N})\mathbb{P}(X_n = k) - \mathbb{P}(X_n = N)\\
&= \sum_{k=0}^{N}(1 - \frac{2k}{N})\mathbb{P}(X_n = k)\\
&= \sum_{k=0}^{N}\mathbb{P}(X_n = k) - \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N}k\mathbb{P}(X_n = k)\\
&= 1 - \frac{2}{N}\mathbb{E}(X_n)
\end{aligned}$$

8. Avec la question précédente et par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) - \mathbb{E}(X_n) = 1 - \frac{2}{N}\mathbb{E}(X_n)$$

d'où

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 - \frac{N-2}{N}\mathbb{E}(X_n).$$

La suite $(\mathbb{E}(X_n))_n$ est donc arithmético-géométrique et on obtient :

$$\mathbb{E}(X_n) = \left(\frac{N-2}{N}\right)^n \left(\mathbb{E}(X_0) - \frac{N}{2}\right) + \frac{N}{2}.$$

9. On suppose $N > 2$. On a alors $0 < \dfrac{N-2}{N} < 1$ donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{N-2}{N}\right)^n = 0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \frac{N}{2}.$$

Après un temps long, en moyenne les deux urnes contiennent le même nombre de boules.

Partie 3 – Étude de la probabilité stationnaire

On s'intéresse dans cette question à l'espace propre de A associé à la valeur propre 1, que l'on notera E_1.

10. Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in E_1$. Comme $AX = X$, on a :

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{N} x_1 \\
x_k &= \frac{N-k+1}{N} x_{k-1} + \frac{k+1}{N} x_{k+1} \quad \forall k \in [\![1, N-1]\!] \\
x_N &= \frac{1}{N} x_{N-1}
\end{aligned}$$

Prouvons par récurrence double finie que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $x_k = \dbinom{N}{k} x_0$.

- Initialisation : on a bien $x_1 = N x_0 = \dbinom{N}{1} x_0$.
- Hérédité : soit $k \in [\![1, N-1]\!]$ et supposons que $x_k = \dbinom{N}{k} x_0$ et $x_{k-1} = \dbinom{N}{k-1} x_0$.
  - Si $k \neq N-1$, alors $x_k = \dfrac{N-k+1}{N} x_{k-1} + \dfrac{k+1}{N} x_{k+1}$ donc :

$$\begin{aligned}
\frac{k+1}{N} x_{k+1} = x_k - \frac{N-k+1}{N} x_{k-1} &= \binom{N}{k} x_0 - \frac{N-k+1}{N} \binom{N}{k-1} x_0 \\
&= \frac{N!}{(N-k)!} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{N(k-1)!} \right) x_0 \\
&= \frac{N!}{(N-k)!} \frac{N-k}{Nk!} x_0.
\end{aligned}$$

D'où

$$x_{k+1} = \frac{N!}{(N-k-1)!(k+1)!}x_0 = \binom{N}{k+1}x_0.$$

— Si $k = N-1$ alors

$$x_{k+1} = x_N = \frac{1}{N}x_{N-1} = \frac{1}{N}\binom{N}{N-1}x_0 = x_0 = \binom{N}{N}x_0$$

Ainsi, l'hérédité est prouvée.

— Conclusion : on a montré que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $x_k = \binom{N}{k}x_0$.

11. D'après la question précédente :

$$E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \binom{N}{k} \\ \vdots \end{pmatrix}\right)$$

donc $\dim(E_1) = 1$.

12. Par la formule du binôme de Newton $S = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} = 2^N$.

13. Soit $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} \in E_1$. Alors, d'après la question 11, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall k \in [\![0, N]\!], \quad \pi_k = \lambda\binom{N}{k}.$$

On a donc

$$\sum_{k=0}^{N} \pi_k = 1 \iff \sum_{k=0}^{N} \lambda\binom{N}{k} = 1 \iff \lambda = \frac{1}{2^N}.$$

Ainsi l'unique vecteur π vérifiant les conditions est donné par :

$$\forall k \in [\![0, N]\!], \quad \pi_k = \frac{\binom{N}{k}}{2^N}.$$

On donnera son expression.

14. On considère la variable aléatoire X_∞ telle que :

$$X_\infty(\Omega) = [\![0, N]\!] \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_\infty = k) = \pi_k.$$

D'après la question précédente, on constate que X_∞ suit la loi $\mathcal{B}(N, 1/2)$.

15. On suppose que X_0 suit la même loi que X_∞. Alors $Y_0 =$
pi et comme $A\pi = \pi$, la question 2 et une récurrence immédiate donnent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = \pi.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit la loi $\mathcal{B}(N, 1/2)$.

Problème 2 – D'après G2E 2024

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $(\cdot \mid \cdot)$.

On confondra les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ainsi que les réels et les matrices carrées de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$.

Si A est une matrice, sa transposée est notée A^T. Si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, son orthogonal est noté $E^\perp$.

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$.
L'objectif de ce problème est de démontrer l'appartenance à $S_n^+(\mathbb{R})$ de certaines matrices. La partie 1 est consacrée à l'étude d'exemples en petites dimensions. Dans la partie 2, on fait le lien avec la notion de produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ et dans la partie 3 avec la notion de covariance. Les parties 2 et 3 ne sont pas indépendantes.

Partie 1 – Quelques exemples

1. La matrice A n'est pas symétrique donc elle n'appartient pas à $S_2^+(\mathbb{R})$.
Toutes les autres sont symétriques et on étudie donc leur spectre.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\det(B - \lambda I_2) = \lambda^2 - 1.$$

Les valeurs propres de B sont donc -1 et 1 : B n'appartient pas à $S_2^+(\mathbb{R})$.

$$\det(C - \lambda I_2) = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(2-\lambda).$$

Les valeurs propres de C sont donc 0 et 2 : C appartient à $S_2^+(\mathbb{R})$.

$$\det(D - \lambda I_2) = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 5).$$

Les valeurs propres de D sont donc 1 et 5 : D appartient à $S_2^+(\mathbb{R})$.

2. On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices $M(a,b)$ défini par :

$$\mathcal{M} = \{M(a,b)\ ,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{où} \quad M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

(a) On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}\ ,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(M(1,0), M(0,1)\right).
\end{aligned}$$

La famille $(M(1,0), M(0,1))$ est génératrice de $\mathcal{M}$. De plus elle est formée de deux vecteurs non colinéaires donc elle est aussi libre.
Ainsi, $(M(1,0), M(0,1))$ est une base de $\mathcal{M}$ et la dimension de $\mathcal{M}$ est égale à 2.

(b) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $\lambda, y \in \mathbb{R}$.

$$M(a,b)\begin{pmatrix}1\\y\\1\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\y\\1\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{cc} a+by & = \lambda \\ b+ay+b & = \lambda y \\ by+a & = \lambda \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cc} a-\lambda+by & = 0 \\ (a-\lambda)y+2b & = 0 \end{array}\right.$$

— Si $b=0$. On a alors le système :

$$\left\{\begin{array}{cc} a-\lambda & = 0 \\ (a-\lambda)y & = 0 \end{array}\right.$$

donc $\lambda = a$ et n'importe quelles valeurs de y font l'affaire.

— Si $b \neq 0$. En effectuant $L_2 \leftarrow bL_2 - (a-\lambda)L_1$, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{cc} a-\lambda+by & = 0 \\ 2b^2-(a-\lambda)^2 & = 0 \end{array}\right.$$

Donc les valeurs propres associées $a \pm \sqrt{2}b$ et $y = \pm\sqrt{2}$ conviennent.

Dans tous les cas, on peut donc prendre $\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ (vecteur propre associé à $a+\sqrt{2}b$) et $\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}$ (vecteur propre associé à $a-\sqrt{2}b$).

Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur orthogonal aux deux vecteur précédents. Alors :

$$\langle X, \begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\rangle = 0 = \langle X, \begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\rangle \iff \left\{\begin{array}{ccc} x+\sqrt{2}y+z & = & 0 \\ x-\sqrt{2}y+z & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{ccc} x+\sqrt{2}y+z & = & 0 \\ 2(x+z) & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -z \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$

Vérifions alors que $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M(a,b)$:

$$M(a,b)\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-a\\0\\a\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Ainsi $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $M(a,b)$ orthogonaux aux vecteurs précédents (associé à la valeur propre a).

(c) Si $b=0$ alors $M(a,b)=aI_3$ donc on peut prendre n'importe P inversible tel que $P^T=P^{-1}$.

Si $b\neq 0$, d'après la question précédente $M(a,b)$ possède trois valeurs propres distinctes : $a-\sqrt{2}b$, $a+\sqrt{2}b$ et a.

De plus la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.

Comme $M(a,b)$ est symétrique, il s'agit donc d'une base orthogonale. Pour obtenir la matrice P recherchée, il suffit de la normaliser :

$$\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right)$$

est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $M(a,b)$.

Ainsi en posant :

$$P=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

on a une matrice qui convient (avec $r=\sqrt{2}$).

(d) La matrice $M(a,b)$ appartient à $S_3^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $a\geq 0$, $a-b\sqrt{2}\geq 0$ et $a+b\sqrt{2}\geq 0$ si et seulement si $a\geq |b|\sqrt{2}$.

Partie 2 – Matrice de Gram

Soit une famille $(e_1,\dots,e_n)$ de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note $E=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$ et on appelle matrice de Gram de cette famille la matrice G définie par :

$$G=\begin{pmatrix} (e_1|e_1) & (e_1|e_2) & \cdots & (e_1|e_n) \\ (e_2|e_1) & (e_2|e_2) & \cdots & (e_2|e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (e_n|e_1) & (e_n|e_2) & \cdots & (e_n|e_n) \end{pmatrix}.$$

3. **(a)** Soit $x\in\mathbb{R}^n$. On procède par double inclusion.

$\Rightarrow$ Supposons $x\in E^{\perp}$. Alors pour tout $y\in E$, $(x|y)=0$.
Comme $\forall i\in[\![1,n]\!],\ e_i\in E$ alors :

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad (x|e_i)=0.$$

$\Leftarrow$ Supposons que $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad (x|e_i) = 0$. Soit $y \in E$.
Par définition de E, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i.$$

Par linéarité à droite du produit scalaire, on en déduit :

$$(x|y) = \left(x \middle| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x|e_i) = 0.$$

Ainsi :

$$x \in E^{\perp} \iff (\forall i \in [\![1,n]\!], \quad (x|e_i) = 0).$$

(b) Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Si on note $G \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ alors :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad y_k = \sum_{i=1}^{n} (e_k|e_i) x_i = \left(e_k \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right).$$

$\Rightarrow$ Supposons $(x_1, \ldots, x_n) \in \ker(G)$. Alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a :

$$\left(e_k \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) = y_k = 0.$$

Donc d'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E^{\perp}$.

$\Leftarrow$ Supposons $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E^{\perp}$. Alors d'après la question précédente, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a :

$$y_k = \left(e_k \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) = 0.$$

Donc $(x_1, \ldots, x_n) \in \ker(G)$.

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \ker(G) \iff \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E^{\perp}.$$

(c) Supposons $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre. Comme elle est constituée de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, c'est donc une base.
Ainsi $E = \mathbb{R}^n$ et $E^{\perp} = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. En particulier, par liberté :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E^{\perp} \iff \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0_{\mathbb{R}^n} \iff \forall i \in [\![1,n]\!] \ x_i = 0.$$

La question précédente implique que $\ker(G) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et donc que G est inversible.

Réciproquement, si on suppose G inversible alors la question précédente entraine que $E^\perp = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ donc :

$$E = (E^\perp)^\perp = \{0_{\mathbb{R}^n}\}^\perp = \mathbb{R}^n.$$

En particulier $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ donc une base (par un argument de dimension) donc libre.

4. Dans cette question, on cherche à prouver que $G \in S_n^+(\mathbb{R})$ et on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(a) Si on pose $GX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ alors :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad y_k = \sum_{i=1}^{n} (e_k|e_i)x_i = \left(e_k \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right).$$

On obtient, par suite :

$$\begin{aligned} X^T G X = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k &= \sum_{k=1}^{n} x_k \left(e_k \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k \middle| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \right) \end{aligned}$$

en utilisant la linéarité à gauche.
Ainsi :

$$X^T G X = (x'|x') \quad \text{où} \quad x' = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

(b) Soit $\lambda \in \mathrm{Spec}(G)$ et X un vecteur propre de G associé à cette valeur propre. On a d'une part, d'après la question précédente :

$$X^T G X = (x'|x') = \|x'\|^2 \geq 0.$$

D'autre part :

$$X^T G X = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2.$$

Comme X est un vecteur propre, il est non nul et donc $\|X\|^2 > 0$. Ainsi :

$$\lambda = \frac{\|x'\|^2.}{\|X\|^2} \geq 0.$$

La matrice G est symétrique par symétrie du produit scalaire et ses valeurs propres sont positives par ce qui précède. Donc $G \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Partie 3 – Matrice de covariance

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ n variables aléatoires réelles discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telles que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la covariance de X_i et X_j existe. On appelle matrice de covariance de $(X_1, \ldots, X_n)$ la matrice Σ définie par :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(X_1, X_1) & \mathrm{Cov}(X_1, X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2, X_1) & \mathrm{Cov}(X_2, X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}(X_n, X_1) & \mathrm{Cov}(X_n, X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix}.$$

5. **(a)** Soit $(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3$. D'après les hypothèses, toutes les covariances impliquées existent bien. La formule de Koenig-Huygens donne :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_i, X_j + xX_k) &= \mathbb{E}(X_i(X_j + xX_k)) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j + xX_k) \\ &= \mathbb{E}(X_iX_j) + x\mathbb{E}(X_iX_k) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) - x\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_k) \quad \text{par linéarité} \\ &= \mathbb{E}(X_iX_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) + x(\mathbb{E}(X_iX_k) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_k)) \\ &= \mathrm{Cov}(X_i, X_j) + x\mathrm{Cov}(X_i, X_k). \end{aligned}$$

(b) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Montrons par récurrence que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$:

$$\mathrm{Cov}(X_i, \sum_{j=1}^{k} x_jX_j) = \sum_{j=1}^{k} x_j\mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

- Initialisation : le cas $k = 1$ est fait à la question précédente.
- Hérédité : soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et supposons que

$$\mathrm{Cov}(X_i, \sum_{j=1}^{k} x_jX_j) = \sum_{j=1}^{k} x_j\mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_i, \sum_{j=1}^{k+1} x_jX_j) &= \mathrm{Cov}(X_i, \sum_{j=1}^{k} x_jX_j + x_{k+1}X_{k+1}) \\ &= \mathrm{Cov}(X_i, \sum_{j=1}^{k} x_jX_j) + x_{k+1}\mathrm{Cov}(X_i, X_{k+1}) \end{aligned}$$

d'après la question précédente appliquée avec les variables X_i, $\sum_{j=1}^{k} x_jX_j$ et X_{k+1}.
L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_i, \sum_{j=1}^{k+1} x_j X_j) &= \mathrm{Cov}(X_i, \sum_{j=1}^{k} x_j X_j + x_{k+1} X_{k+1}) \\
&= \mathrm{Cov}(X_i, \sum_{j=1}^{k} x_j X_j) + x_{k+1}\mathrm{Cov}(X_i, X_{k+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{k} x_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j) + x_{k+1}\mathrm{Cov}(X_i, X_{k+1}) \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} x_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j).
\end{aligned}$$

— Conclusion : le résultat est démontré.

On a donc prouvé :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{Cov}(X_i, \sum_{j=1}^{n} x_j X_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

6. **(a)** La matrice Σ est une matrice symétrique réelle par symétrie de la covariance.

(b) Soit λ une valeur propre de Σ et X un vecteur propre associé.

Si on pose $\Sigma X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ alors :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad y_k = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_k | X_i) x_i = \mathrm{Cov}\left(X_k, \sum_{i=1}^{n} x_i X_i\right).$$

On obtient, par suite :

$$\begin{aligned}
X^T \Sigma X = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k &= \sum_{k=1}^{n} x_k \mathrm{Cov}\left(X_k, \sum_{i=1}^{n} x_i X_i\right) \\
&= \mathrm{Cov}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k X_k, \sum_{i=1}^{n} x_i X_i\right) \\
&= \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k X_k\right).
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$X^T \Sigma X = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2.$$

Comme X est un vecteur propre, il est non nul et donc $\|X\|^2 > 0$. Ainsi :

$$\lambda = \frac{\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k X_k\right)}{\|X\|^2} \geq 0.$$

Cela montre que $\Sigma \in S_n^+(\mathbb{R})$.